И.А.НАЗАРОВ
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Под элементами вычислительной геометрии здесь понимаются сведения, необходимые для решения одной из задач машинной графики, автоматизированного проектирования, числового программного управления – задачи проектирования гладких кривых и поверхностей.

В своей простейшей постановке это задача точечной интерполяции: найти в заданном множестве кривых (поверхностей) кривую (поверхность), проходящую через заданные точки трехмерного пространства.

В случае, когда координаты заданных точек известны лишь приближенно (например, из-за ошибок измерения), нецелесообразно добиваться, чтобы выбранная кривая (поверхность) проходила через эти точки. Достаточно, чтобы точки были "не слишком далеки" от нее. Конечно, понятие расстояния должно быть уточнено.

1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРИВЫХ

1.1. Полиномиальная интерполяция

Заданы N точек своими радиусами-векторами

$$r_1, r_2, \ldots, r_N.$$

Требуется постоить гладкую кривую, проходящую через эти точки. Кривые мы будем задавать параметрически. Припишем (вообще говоря, произвольно) заданным векторам значения параметра t:

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_N.$$

Тогда задача сведется к построению трех интерполяционных полиномов *порядка*[1] N

$$t \mapsto [x(t), y(t), z(t)]^T.$$

В дальнейшем все рассуждения будут вестись для одной координаты – абсциссы. Известно, что существует *единственный* полином x порядка N, удовлетворяющий условиям

$$x(t_k) = X_k, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{1.1.1}$$

где X_k – заданные числа. Он может быть записан, например, в форме Лагранжа

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} X_k \prod_{j \neq k} \frac{t - t_j}{t_k - t_j}. \tag{1.1.2}$$

Выполнение условий (1.1.1) проверяется подстановкой. Единственность интерполяционного полинома (1.1.2) следует из того, что два полинома *порядка* N, совпадающие в N точках, совпадают всюду.

[1]Множество полиномов порядка N содержит все полиномы, степень которых *строго меньше*, чем N, и еще *нулевой полином* – функцию, тождественно равную нулю.

Серьезное предупреждение. Даже ограничиваясь полиномами порядка N мы можем получать различные кривые, проходящие через N заданных точек. Неоднозначность объясняется произвольностью нумерации точек и произвольностью значений параметра, приписываемых этим точкам. Удобно считать, что параметр – время. Тогда, изменяя нумерацию точек, мы изменяем очередность прохождения через них, а изменяя приписанные им значения параметра, меняем форму кривой и скорость движения по ней.

Пусть, например, заданы своими декартовыми координатами 4 точки плоскости: $(1,2)$, $(3,6)$, $(7,4)$, $(2,1)$ (рис.1.). Присвоив этим точкам значения параметра $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 4$, получим кривую, изображенную сплошной линией. Поменяв местами значения параметра ($t_1 = 2$, $t_2 = 4$, $t_3 = 3$, $t_4 = 1$), получим кривую, изображенную пунктиром.

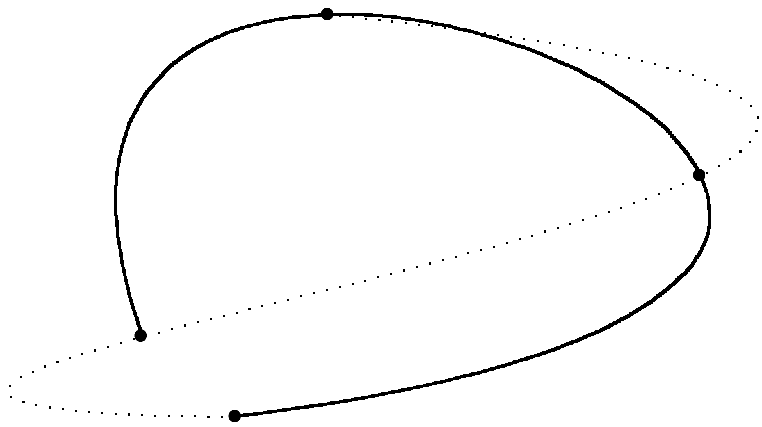

Рис.1

1.2. Почему практически непригодна полиномиальная интерполяция

Рассмотрим два классических примера. Сначала построим полином четвертого порядка по таблице

t	0	1	8	27
x	0	1	2	3

$$x(t) = \frac{(t-0)\cdot(t-8)\cdot(t-27)}{(1-0)\cdot(1-8)\cdot(1-27)}\times 1 + \frac{(t-0)\cdot(t-1)\cdot(t-27)}{(8-0)\cdot(8-1)\cdot(8-27)}\times 2 + \frac{(t-0)\cdot(t-1)\cdot(t-8)}{(27-0)\cdot(27-1)\cdot(27-8)}\times 3 =$$

$$= \frac{239t^3 - 8820t^2 + 70825t}{62224}.$$

Несмотря на то, что ломаная, соединяющая заданные точки, выпукла, график интерполяционного полинома имеет точки перегиба (рис.2). Такая интерполяция обычно считается неудовлетворительной. Известно, что с увеличением количества узлов интерполяции опасность появления осцилляций у интерполирующего полинома возрастает. Это демонстрируется на втором примере, который называется примером Рунге: функция $x = \dfrac{1}{1+25t^2}$ интерполируется на сегменте $[-1, 1]$ при равномерной сетке.

На рис.3 изображены: график функции Рунге (жирная линия) и графики интерполяционных полиномов при числах узлов $N_1 = 3$ (пунктир) и $N_2 = 9$ (тонкая линия).

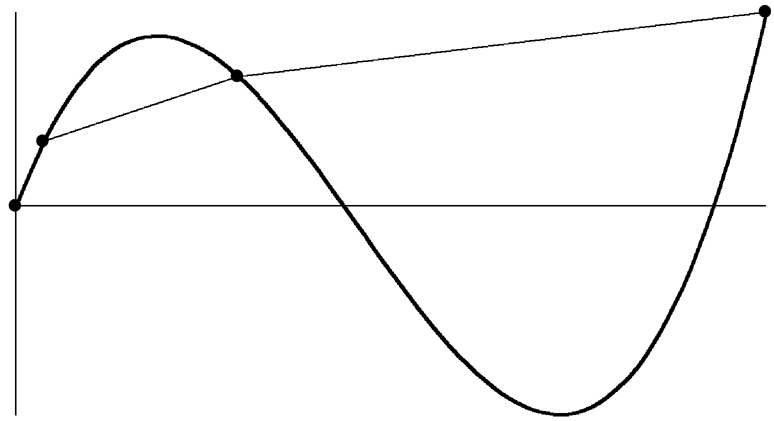

Рис.2

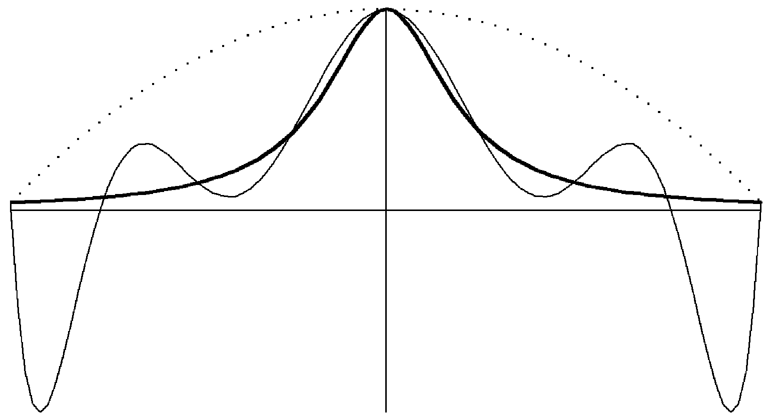

Рис.3

Во избежание паразитных осцилляций при большом числе узлов обычно используют полиномиальную сплайн-интерполяцию: каждая *порция* кривой, заключенная между двумя соседними (по номерам) узлами аппроксимируется своим полиномом.

1.3. Полиномиальная сплайн-интерполяция

Пусть заданы своими декартовыми координатами точек N плоскости . Как мы условились ранее, рассматриваем их абсциссы $X_1, \ldots, X_N$.

Чтобы не перегружать изложение материала излишними подробностями, будем считать, что началу каждой порции сплайна соответствует значение параметра $t = 0$, а концу $t = 1$. Переход к общему случаю не вызывает затруднений.

Сплайн второго порядка.

Семейство порций сплайна *второго* порядка *двухпараметрическое.* Оба параметра определяются из условий интерполяции.

Для *единственного* (см. п.1.1) сплайна второго порядка k-я порция запишется в виде

$$x_k(t) = \delta_k(t)X_k + \delta_2(t)X_{k+1}.$$

Здесь δ_1 и δ_2 – полиномы второго порядка, удовлетворяющие очевидным условиям

$$\begin{array}{ll} \delta_1(0) = 1; & \delta_2(0) = 0; \\ \delta_1(1) = 0; & \delta_2(1) = 1. \end{array} \tag{1.3.1}$$

Если записать эти полиномы в виде

$$\delta_j(t) = a_j + b_j t; \quad j = 1, 2,$$

то для определения коэффициентов получим из (1.3.1) матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решив это уравнение, найдем

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Итак,

$$x_k(t) = (1 - t)X_k + tX_{k+1}; \quad k = 1, \ldots, N - 1. \tag{1.3.2}$$

Замечание. (1.3.2) – уравнение отрезка, соединяющего точки $(0, X_k)$ и $(1, X_{k+1}$. График сплайна второго порядка – ломаная.

Сплайн третьего порядка.

Семейство порций сплайна *третьего* порядка *трехпараметрическое.* Два параметра определяются из условий интерполяции. Оставшуюся степень свободы можно использовать, например, для обеспечения *гладкости* сплайна (непрерывности первой производной во *внутренних* узлах сетки).

Запишем порцию этого сплайна в виде

$$x_k(t) = \gamma_1(t)X_k + \gamma_2(t)X_{k+1} + \gamma_3(t)V_k,$$

где $V_k = x'_k(0)$.

Полиномы третьего порядка γ_1, γ_2, γ_3 удовлетворяют очевидным условиям

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(0)=1; & \gamma_2(0)=0; & \gamma_3(0)=0; \\ \gamma_1(1)=0; & \gamma_2(1)=1; & \gamma_3(1)=0; \\ \gamma_1'(0)=1; & \gamma_2'(0)=0; & \gamma_3'(0)=1. \end{array} \tag{1.3.3}$$

Записав искомые полиномы в виде

$$\gamma_j(t)=a_j+b_jt+c_jt^2; \quad (j=1,2,3),$$

и учитывая, что тогда

$$\gamma_j'(t)=b_j+2c_jt; \quad (j=1,2,3),$$

получим из условий (1.3.3) матричное уравнение для определения коэффициентов a_j, b_j, c_j:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Решая это уравнение, найдем

$$\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}.$$

Итак,

$$x_k(t)=(1-t^2)X_k+t^2X_{k+1}+t(1-t)V_k. \tag{1.3.4}$$

Дифференцируя (1.3.4), получим

$$x_k'(t)=-2tX_k+2tX_{k+1}+(1-2t)V_k.$$

Условие непрерывности производной сплайна в узле с номером k дает:

$$x_{k-1}'(1)=-2X_{k-1}+2X_k-V_{k-1}=V_k=x_k'(0)$$

или

$$V_{k-1}+V_k=-2(X_{k-1}-X_k); \quad k=2,\ldots,N-1.$$

Для определения $(N-1)$ параметров $(V_1,\ldots V_{N-1})$ мы получили $N-2$ уравнений. Оставшуюся степень свободы можно использовать, например, так. Зададим произвольно V_1. Тогда оставшиеся параметры найдутся из системы уравнений

$$\begin{bmatrix}1&0&0&\ldots&0&0\\1&1&0&\ldots&0&0\\0&1&1&\ldots&0&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_2\\V_3\\V_4\\ \cdot\\V_{N-1}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-X_1+X_2-V_1\\-X_2+X_3\\-X_3+X_4\\ \ldots\ldots\\-X_{N-1}+X_N\end{bmatrix}.$$

Поскольку определитель матрицы этой системы равен единице, ее решение существует и единственно. Отметим также, что матрица системы *двухдиагональная*, а для решения таких систем уравнений существуют эффективные алгоритмы.

Сплайн четвертого порядка

Мы построили непрерывный интерполяционный сплайн второго порядка с разрывной производной. Его график - ломаная, соединяющая заданные точки. Интерполяционный сплайн третьего порядка имеет непрерывную первую производную. Его график - гладкая кривая, состоящая из отрезков парабол.

Рассмотрим теперь нашедший наибольшее применение интерполяционный сплайн четвертого порядка с непрерывной второй производной. В качестве одного из возможных обоснований необходимости выполнения этого условия проведем анализ ситуации, описанной в очень популярном в свое время романе Д. Гранина "Иду на грозу".

"... При испытании чугунные каретки разбивались. Каретка скользила по дуговым направляющим, и поломка происходила, когда скорость достигала рабочей... Он спросил, что представляет дуга, по которой движется каретка? Круг?... Тогда все логично, каретка должна ломаться, поскольку имеется разрыв производной... В сопряжении дуги с направляющей происходил удар... следует заменить окружность параболой."

Расшифруем цитированное. Некое материальное тело, именуемое кареткой, движется по плоскому пути, составленному из отрезка прямой и дуги окружности (рис.4).

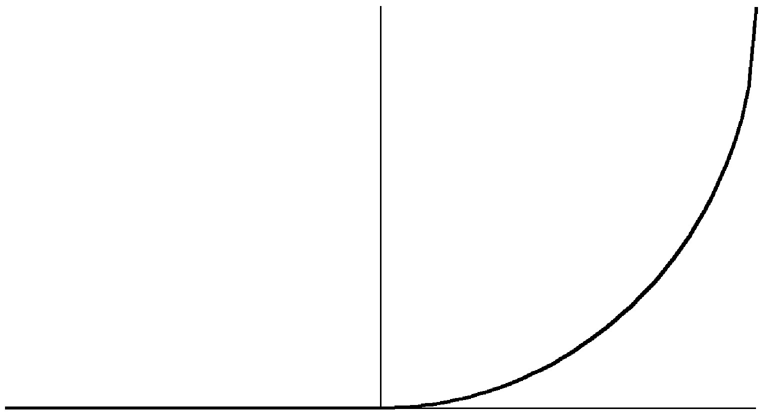

Рис.4

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0 \\ R - \sqrt{R^2 - t^2} & \text{при} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

В точке сопряжения (начало координат) *первая* производная (скорость движения) вопреки утверждению Гранина непрерывна. Действительно,

$$v(t) = x'(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0 \\ \dfrac{t}{\sqrt{R - t^2}} & \text{при} \quad t \ge 0; \end{cases}$$

$$v(-0) = v(+0) = 0.$$

Разрывной в точке сопряжения оказывается *вторая* производная (ускорение)

$$w(t) = x''(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0 \\ \dfrac{R^2}{(R^2 - t^2)^{3/2}} & \text{при} \quad t \ge 0; \end{cases}$$

$$w(-0) = 0; \quad w(+0) = \frac{1}{R}.$$

По второму закону Ньютона скачок ускорения означает скачок силы, т.е. удар, который и разбивает каретку.

Покажем теперь несостоятельность рекомендации Гранина - заменить окружность параболой. В этом случае

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0 \\ kt^2 & \text{при} \quad t \ge 0; \end{cases}$$

$$w(t) = x''(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0 \\ 2k & \text{при} \quad t \ge 0; \end{cases}$$

$$w(-0) = 0; \quad w(+0) = 2k.$$

Видно, что в начале координат ускорение по-прежнему разрывно - каретки будут продолжать разбиваться.

Единственное, что извиняет выпускника ЛПИ Гранина, – о разрыве производной и о параболе говорит в романе герой, не утомленный высшим образованием. Его ошибки нетрудно исправить. Достаточно заменить слово "производная" словами "вторая производная", а слово "парабола" словами "кубическая парабола".

Тогда

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0 \\ kt^3 & \text{при} \quad t \ge 0; \end{cases}$$

$$w(t) = x''(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0 \\ 6kt & \text{при} \quad t \ge 0; \end{cases}$$

$$w(-0) = w(+0) = 0.$$

Теперь скачка ускорения нет и каретки, наконец-то, перестанут разбиваться[2].

Выяснив важность непрерывности второй производной, покажем, что ее может обеспечить интерполяционный сплайн четвертого порядка. Запишем его порцию в виде

$$x_k(t) = \beta_1(t)X_k + \beta_2(t)X_{k+1} + \beta_3(t)W_k + \beta_4(t)W_{k+1}.$$

где $W_k = x_k''(0), \quad W_{k+1} = x_k''(1).$

Полиномы четвертого порядка β_1, β_2, β_3, β_4 удовлетворяют очевидным условиям

$$\begin{array}{llll} \beta_1(0) = 1; & \beta_2(0) = 0; & \beta_3(0) = 0; & \beta_4(0) = 0; \\ \beta_1(1) = 0; & \beta_2(1) = 1; & \beta_3(1) = 0; & \beta_4(1) = 0; \\ \beta_1''(0) = 0; & \beta_2''(0) = 0; & \beta_3''(0) = 1 & \beta_4''(0) = 0; \\ \beta_1''(1) = 0; & \beta_2''(1) = 0; & \beta_3''(1) = 0 & \beta_4''(1) = 1. \end{array} \tag{1.3.5}$$

Записав искомые полиномы в виде

$$\beta_j(t) = a_j + b_jt + c_jt^2 + d_jt^3; \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

и учитывая, что тогда

$$\beta_j''(t) = 2c_j + 6d_jt; \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

[2]Известно (всем, кроме петербургских дорожников), что именно по кубической параболе следует осуществлять сопряжения рельсовых путей на поворотах!

получим из условий (1.3.5) матричное уравнение для определения коэффициентов a_j, b_j, c_j, d_j:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&2&0\\0&0&2&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Решая это уравнение, найдем

$$\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&2&0\\0&0&2&6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&-1/3&-1/6\\0&0&1/2&0\\0&0&-1/6&1/6\end{bmatrix}.$$

Таким образом k-я порция сплайна имеет вид

$$x_k(t)=(1-t)X_k+tX_{k+1}+\frac{-2t+3t^2-t^3}{6}W_k+\frac{-t+t^3}{6}W_{k+1}. \tag{1.3.6}$$

Непрерывность сплайна и его второй производной обеспечены по построению. Продифференцируем (1.3.6)

$$x_k'(t)=-X_k+X_{k+1}+\frac{-2+6t-3t^2}{6}W_k+\frac{-1+3t^2}{6}W_{k+1}$$

и потребуем непрерывности первой производной во *внутренних* узлах сетки:

$$x_{k-1}'(1)=-X_{k-1}+X_k+\frac{1}{6}W_{k-1}+\frac{1}{3}W_k=-X_k+X_{k+1}-\frac{1}{3}W_k-\frac{1}{6}W_{k+1}=x_k'(0).$$

Отсюда

$$W_{k-1}+4W_k+W_{k+1}=6(X_{k-1}-2X_k+X_{k+1});\quad k=2,\dots,N-1. \tag{1.3.7}$$

Система (1.3.7) содержит N переменных $(W_1,\dots,W_N)$ и $N-2$ уравнения. Положим $W_1=W_N=0$, (что упростит выкладки, не меняя существа дела). Введем $(N-2)\times N$-матрицу

$$F=\begin{bmatrix}1&-2&1&0&\dots&0&0&0\\0&1&-2&1&\dots&0&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&1&-2&1\end{bmatrix},$$

$(N-2)\times(N-2)$-матрицу

$$G=\begin{bmatrix}4&1&0&\dots&0&0&0\\1&4&1&\dots&0&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1&4&1\\0&0&0&\dots&0&1&4\end{bmatrix},$$

и векторы

$$\widetilde{W}=[W_2,\dots,W_{N-1}]^T,\quad X=[X_1,\dots,X_N]^T.$$

Тогда система уравнений (1.3.7) примет вид

$$G\cdot\widetilde{W}=6F\cdot X. \tag{1.3.8}$$

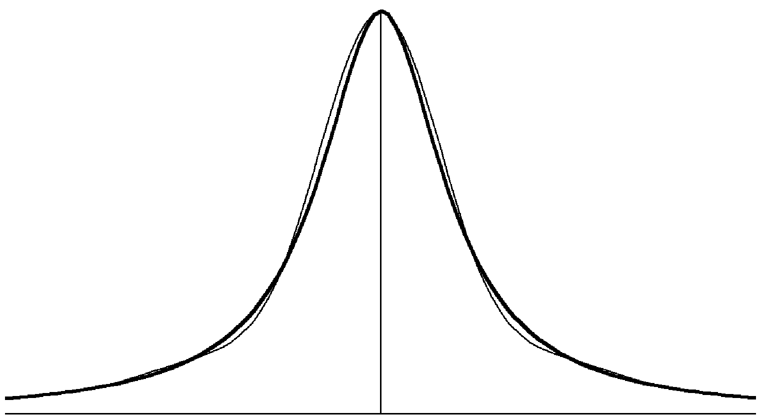

Рис.5

В Приложении показано, что матрица G положительно определена. Из этого следует, что уравнение (1.3.8) имеет единственное решение, которое может быть получено, например, по методу Холецкого.

На рис.5 изображены кривая Рунге (жирной линией) и график интерполяционного сплайна 4 порядка, построенного на равномерной сетке с 9 узлами (свободные параметры – значения второй производной на границах – приняты равными нулю). Сравните качество приближения интерполяционным полиномом (рис.3) и интерполяционным сплайном (рис.5).

1.4. Сглаживающий сплайн четвертого порядка с двумя непрерывными производными

Как уже было сказано, наличие погрешностей в координатах заданных точек кривой приводит к изменению в постановке задачи. В этом случае представляется нецелесообразным требовать, чтобы все заданные точки лежали на кривой. Достаточно, чтобы они были от этой кривой "не очень далеки". Добавив к этому требованию ограничение на ускорение или, точнее, на среднеквадратическое значение второй производной сплайна, получим *один из возможных* функционалов качества сплайн аппроксимации:

$$\Phi = p \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(X_k - x_k(0)\right)^2 + (1-p) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^1 \left(x_k''(t)\right)^2 dt. \tag{1.4.1}$$

Этот функционал – взвешенная сумма двух слагаемых. Первое слагаемое

$$\sum_{k=1}^{N} \left(X_k - x_k(0)\right)^2$$

– сумма квадратов разностей абсцисс заданных точек (X_k) и соответствующих им абсцисс сплайна $\big(x_k(0)\big)$ – расстояние между экспериментальными данными и их сплайн-аппроксимацией.

Второе слагаемое

$$\sum_{k=1}^{N-1} \int_0^1 \left(x_k''(t)\right)^2 dt$$

– среднеквадратическое значение второй производной сплайна – одна из возможных мер кривизны сплайна[3].

"Параметр сглаживания" p удовлетворяет неравенству $0 < p < 1$. При $p = 1$ получится, очевидно, интерполяционный сплайн. При $p = 0$ функционал качества не учитывает расстояние сплайна от заданных точек - минимизируется только среднеквадратическое значение второй производной сплайна - и решение очевидно: *любая прямая*!

Перепишем полученное в (1.3.6) выражение для порции сплайна, обозначив $x_k(0) = S_k$,

$$x_k(t) = (1-t)S_k + tS_{k+1} + \frac{-2+6t-3t^2}{6}W_k + \frac{-1+3t^2}{6}W_{k+1}. \tag{1.4.2}$$

Дифференцируя (1.4.2) дважды, получим

$$x_k''(t) = (1-t)W_k + tW_{k+1}.$$

Подставим этот результат в (1.4.1).

$$\Phi = p \cdot \sum_{k=1}^{N} (X_k - S_k)^2 + (1-p) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^1 \big((1-t)W_k + tW_{k+1}\big)^2 dt =$$

$$= p \cdot \sum_{k=1}^{N} (X_k - S_k)^2 + \frac{1-p}{3} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \big(W_k^2 + W_k W_{k+1} + W_{k+1}^2\big). \tag{1.4.3}$$

Запишем (1.4.3) в матричной форме

$$\Phi = p \cdot (S-X)^T \cdot (S-X) + \frac{1-p}{6} \cdot \widetilde{W}^T \cdot G \cdot \widetilde{W} \tag{1.4.4}$$

(матрица G и векторы X, $\widetilde{W}$ определены в п.1.3).

Переписав (1.3.8) в виде $G \cdot \widetilde{W} = 6F \cdot S$ (матрица F определена в п.1.3), найдем отсюда $\widetilde{W} = 6 \cdot G^{-1} \cdot F \cdot S$.

Подставив результат в (1.4.4), получим

$$\Phi = p \cdot (S-X)^T \cdot (S-X) + 6(1-p) \cdot S^T \cdot F^T \cdot G^{-1} \cdot G \cdot G^{-1} \cdot F \cdot S =$$

$$= p \cdot (S-X)^T \cdot (S-X) + 6(1-p) \cdot S^T \cdot F^T \cdot G^{-1} \cdot F \cdot S =$$

$$= S^T \big(p \cdot I + 6(1-p) \cdot F^T \cdot G^{-1} \cdot F\big) \cdot S - 2p \cdot S^T \cdot X + p \cdot X^T \cdot X.$$

В приложении показана положительная определенность матрицы $p \cdot I + 6(1-p) \cdot F^T \cdot G^{-1} \cdot F$. Следовательно, функционал имеет единственный минимум в стационарной точке, которую найдем, приравнивая нулю градиент функционала

$$\big(p \cdot I + 6(1-p) \cdot F^T \cdot G^{-1} \cdot F\big) \cdot S - p \cdot X = \Theta.$$

Решение этого уравнения даст вектор S, зная который можно найти $\widetilde{W} = 6G^{-1} \cdot F \cdot S$.

2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Переходя к проектированию поверхностей, отметим существенное усложнение задачи. Во-первых, каждая координата является теперь функцией двух переменных, и при упорядочении заданных точек каждую из них следует снабдить двумя индексами.

[3] Напомним, что кривизна кривой, заданной уравнением $x = f(t)$, равна $\dfrac{|f''(t)|}{\Big(1 + \big(f'(t)\big)^2\Big)^{3/2}}$

Например, при описании сферы можно упорядочить заданные на ней точки по возрастанию значений их сферических координат θ и φ, т.е.

$$\theta_m > \theta_n \Longleftrightarrow m > n; \quad \varphi_k > \varphi_p \Longleftrightarrow k > p.$$

Вообще же говоря, процедура упорядочения точек неалгоритмизируема, и мы будем предполагать, что каждой заданной точке уже присвоены два индекса.

Рассматривая (как и в случае кривой) только абсциссу, получаем двухмерный массив абсцисс $X_{m,n}; \quad m = 1, \ldots, M;\ n = 1, \ldots, N$. Проектируемая поверхность разбивается при этом на $(M-1) \times (N-1)$ порций. Узлы

$$X_{m,n},\ X_{m+1,n},\ X_{m,n+1},\ X_{m+1,n+1}$$

принадлежат (m, n)-порции.

2.1. Двухмерный интерполяционный сплайн четвертого порядка с непрерывными матрицами Якоби и Гессе

Мы рассмотрим только один способ двухмерной сплайн-интерполяции – тензорные произведения одномерных сплайнов. Порция такого сплайна имеет вид

$$x_{m,n}(u,v) = \big[\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u)\big] \cdot \mathbb{A}_{m,n} \cdot \big[\alpha_1(v), \alpha_2(v), \alpha_3(v), \alpha_4(v)\big]^T. \tag{2.1.1}$$

Здесь

$$\mathbb{A}_{m,n} = \begin{bmatrix} X_{m,n} & X_{m,n+1} & Q_{m,n} & Q_{m,n+1} \\ X_{m+1,n} & X_{m+1,n+1} & Q_{m+1,n} & Q_{m+1,n+1} \\ P_{m,n} & P_{m,n+1} & S_{m,n} & S_{m,n+1} \\ P_{m+1,n} & P_{m+1,n+1} & S_{m+1,n} & S_{m+1,n+1} \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3; \quad \alpha_2(t) = 3t^2 - 2t^3; \quad \alpha_3(t) = t - 2t^2 + t^3; \quad \alpha_4(t) = -t^2 + t^3.$$

$$Q_{m,n} = \frac{\partial x}{\partial v}(0,0); \quad Q_{m,n+1} = \frac{\partial x}{\partial v}(0,1); \quad Q_{m+1,n} = \frac{\partial x}{\partial v}(1,0); \quad Q_{m+1,n+1} = \frac{\partial x}{\partial v}(1,1),$$

$$P_{m,n} = \frac{\partial x}{\partial u}(0,0); \quad P_{m,n+1} = \frac{\partial x}{\partial u}(0,1); \quad P_{m+1,n} = \frac{\partial x}{\partial u}(1,0); \quad P_{m+1,n+1} = \frac{\partial x}{\partial u}(1,1),$$

$$S_{m,n} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}(0,0); \quad S_{m,n+1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}(0,1); \quad S_{m+1,n} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}(1,0); \quad S_{m+1,n+1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}(1,1). \tag{2.1.2}$$

Полиномы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ получены по условиям (2.1.2) на основе методики, описанной в п.1.3.

Непосредственным вычислением устанавливается непрерывность сплайна на *внутренних* границах порций (при *произвольных* значениях не определенных пока параметров $P_{m,n}, Q_{m,n}, S_{m,n}, \quad m = 1, \ldots, M-1;\ n = 1, \ldots, N-1$:

$$x_{m-1,n}(1,v) \equiv x_{m,n}(0,v); \quad x_{m,n-1}(u,1) \equiv x_{m,n}(u,0).$$

Так же можно убедиться, что на *внутренних* границах порций непрерывны первые частные производные $\big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\big)$ и смешанная вторая $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$:

$$\frac{\partial x_{m-1,n}}{\partial u}(1,v) \equiv \frac{\partial x_{m,n}}{\partial u}(0,v); \quad \frac{\partial x_{m,n-1}}{\partial u}(u,1) \equiv \frac{\partial x_{m,n}}{\partial u}(u,0),$$

$$\frac{\partial x_{m-1,n}}{\partial v}(1,v) \equiv \frac{\partial x_{m,n}}{\partial v}(0,v); \quad \frac{\partial x_{m,n-1}}{\partial v}(u,1) \equiv \frac{\partial x_{m,n}}{\partial v}(u,0),$$

$$\frac{\partial^2 x_{m-1,n}}{\partial u \partial v}(1,v) \equiv \frac{\partial^2 x_{m,n}}{\partial u \partial v}(0,v); \quad \frac{\partial^2 x_{m,n-1}}{\partial u \partial v}(u,1) \equiv \frac{\partial^2 x_{m,n}}{\partial u \partial v}(u,0).$$

Потребуем теперь, чтобы на *внутренних* границах порций были непрерывны вторые частные производные $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}$. Два условия выполняются тождественно при любых параметрах сплайна:

$$\frac{\partial^2 x_{m,n-1}}{\partial u^2}(u,1) \equiv \frac{\partial^2 x_{m,n}}{\partial u^2}(u,0); \quad \frac{\partial^2 x_{m-1,n}}{\partial v^2}(1,v) \equiv \frac{\partial^2 x_{m,n}}{\partial v^2}(0,v).$$

Оставшиеся два условия дают системы уравнений, из которых определяются значения параметров сплайна:

$$1)\ \frac{\partial^2 x_{m-1,n}}{\partial u^2}(1,v) =$$
$$= (6X_{m-1,n} - 6X_{m,n} + 2P_{m-1,n} + 4P_{m,n})\alpha_1(v) +$$
$$+ (6X_{m-1,n+1} - 6X_{m,n+1} + 2P_{m-1,n+1} + 4P_{m,n+1})\alpha_2(v) +$$
$$+ (6Q_{m-1,n} - 6Q_{m,n} + 2S_{m-1,n} + 4S_{m,n})\alpha_3(v) +$$
$$+ (6Q_{m-1,n+1} - 6Q_{m,n+1} + 2S_{m-1,n+1} + 4S_{m,n+1})\alpha_4(v) =$$
$$= (-6X_{m,n} + 6X_{m+1,n} - 4P_{m,n} - 2P_{m+1,n})\alpha_1(v) +$$
$$+ (-6X_{m,n+1} + 6X_{m+1,n+1} - 4P_{m,n+1} - 2P_{m+1,n+1})\alpha_2(v) +$$
$$+ (-6Q_{m,n} + 6Q_{m+1,n} - 4S_{m,n} - 2S_{m+1,n})\alpha_3(v) +$$
$$+ (-6Q_{m,n+1} + 6Q_{m+1,n+1} - 4S_{m,n+1} - 2S_{m+1,n+1})\alpha_4(v) =$$
$$= \frac{\partial^2 x_{m,n}}{\partial u^2}(0,v)$$

В силу линейной независимости множества полиномов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (проверьте это!) должны быть равны коэффициенты в обеих частях тождества при каждом из них. Приравнивая, получаем четыре попарно равносильных системы уравнений. Две отбрасываем и, наконец, получаем две системы уравнений

$$P_{m-1,n} + 4P_{m,n} + P_{m+1,n} = -3(X_{m-1,n} - X_{m+1,n}), \tag{2.1.3}$$

$$S_{m-1,n} + 4S_{m,n} + S_{m+1,n} = -3(Q_{m-1,n} - Q_{m+1,n}). \tag{2.1.4}$$

Проделав аналогичные преобразования с условием

$$2)\ \frac{\partial^2 x_{m,n-1}}{\partial v^2}(u,1) = \frac{\partial^2 x_{m,n}}{\partial v^2}(u,0),$$

получим

$$Q_{m,n-1} + 4Q_{m,n} + Q_{m,n+1} = -3(X_{m,n-1} - X_{m,n+1}), \tag{2.1.5}$$

$$S_{m,n-1} + 4S_{m,n} + S_{m,n+1} = -3(P_{m,n-1} - P_{m,n+1}). \tag{2.1.6}$$

Полученных уравнений недостаточно для однозначного определения значений всех параметров сплайна. Произвольно могут быть выбраны, *например*, значения элементов первой и последней строк матриц P и S, первого и последнего столбцов матриц Q и S. Положим

$$P_{1,n} = P_{M,n} = 0,\ S_{1,n} = S_{M,n} = 0; \quad n = 1, \ldots, N.$$

$$Q_{m,1} = Q_{m,N} = 0,\ S_{m,1} = S_{m,N} = 0; \quad m = 1, \ldots, M.$$

Тогда система уравнений (2.1.3) запишется в виде

$$G_p \cdot \widetilde{P} = 3H_p \cdot X. \tag{2.1.7}$$

Здесь

$$G_p = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad - \quad (M-2)\times(M-2)\text{-матрица},$$

$$H_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \quad (M-2)\times M\text{-матрица},$$

X – заданная матрица абсцисс размера $M \times N$,
$\widetilde{P}$ –искомая $(M-2) \times N$-матрица.

В Приложении доказана положительная определенность матрицы G_p. Следовательно, матричное уравнение (2.1.7) имеет единственное решение

$$\widetilde{P} = 3G_p^{-1} \cdot H_p \cdot X. \tag{2.1.8}$$

Дополнив $\widetilde{P}$ первой и последней нулевыми строками, получим $M \times N$-матрицу P.

Аналогичные преобразования (2.1.5) дадут (очень советуем их проделать!)

$$G_q \cdot \widetilde{Q}^T = 3H_q \cdot X^T; \quad \widetilde{Q}^T = 3G_q^{-1} \cdot H_q \cdot X^T \quad \text{или } \widetilde{Q} = 3X \cdot H_q^T \cdot C_q^{-1}. \tag{2.1.9}$$

Дополнив $\widetilde{Q}$ первым и последним нулевыми столбцами, получим $M \times N$-матрицу Q.

Для определения $(M-2) \times (N-2)$-матрицы $\widetilde{S}$ имеются две системы уравнений: (2.1.4) и (2.1.6). Запишем (2.1.4) и (2.1.6) в матричной форме

$$G_p \cdot \widetilde{S} = 3H_p \cdot \widetilde{Q}. \tag{2.1.10}$$

$$G_q \cdot \widetilde{S}^T = 3H_q \cdot \widetilde{P}^T. \tag{2.1.11}$$

Решаем (2.1.10)

$$\widetilde{S} = 3G_p^{-1} \cdot H_p \cdot \widetilde{Q}$$

и подставляем в результат $\widetilde{Q}$ из (2.1.9)

$$\widetilde{S} = 9G_p^{-1} \cdot H_p \cdot X \cdot H_q^T \cdot G_q^{-1}. \tag{2.1.12}$$

Решаем (2.1.11)

$$\widetilde{S}^T = 3G_q^{-1} \cdot H_q \cdot \widetilde{P}^T$$

и подставляем в результат $\widetilde{P}$ из (2.1.8)

$$\widetilde{S} = 9G_p^{-1} \cdot H_p \cdot X \cdot H_q^T \cdot G_q^{-1}. \tag{2.1.13}$$

Сравнивая (2.1.12) и (2.1.13), видим, что системы (2.1.4) и (2.1.6) равносильны. Дополнив первый и последний столбцы, первую и последнюю строки $\widetilde{S}$ нулями, получим $M \times N$-матрицу S.

Отметим еще раз, что первая и последняя строка матриц P и S, первый и последний столбцы матриц Q и S могут задаваться произвольно. Этот произвол (как и всякий другой произвол) каждый может использовать с выгодой для себя. Мы за его счет упростили выкладки!

Отметим также, что все преобразования, приведенные в этой брошюре, выполнены в среде MAPLE. Рекомендуем читателю проделать их и именно с помощью MAPLE!

Фортран-программы для построения гладких кривых и поверхностей с помощью интерполяционных и сглаживающих сплайнов (не только полиномиальных!) можно найти, например, в книгах

1. Spaet H. Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flaechen. – R. Oldenbourg Verlag, Muenchen - Wien, 1978.

2. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь. 1985.

Кроме того, сплайн-техника представлена в MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем положительную определенность матриц G и $6(1-p)F^TG^{-1}F+pI$.

1. Спектр матрицы G находится из уравнения

$$det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Полагая $4-\lambda = 2cos(t)$, получим уравнение[4]

$$\frac{sin\left((n+1)t\right)}{sin(t)} = 0,$$

корни которого суть

$$t_k = \frac{k\pi}{n+1}; \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким образом,

$$\lambda_k = 4 - 2cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \geq 2,$$

т.е. матрица G положительно определена.

Вследствие положительной определенности G существует такая матрица $G^{-1/2}$, что

$$G^{-1/2} \cdot G^{-1/2} = G^{-1}.$$

Следовательно,

$$R = F^TG^{-1}F = \left(F^TG^{-1/2}\right) \cdot \left(G^{-1/2}F\right) = \left(G^{-1/2}F\right)^T \cdot \left(G^{-1/2}F\right),$$

т.е. R – матрица Грама и ее собственные числа неотрицательны.

Если μ – собственное число матрицы R, а ν – собственное число матрицы $6(1-p)R+pI$, то $\nu = 6(1-p)\mu + p$. Поскольку $\mu \geq 0$, а $0 \leq p \leq 1$, то $\nu > 0$, т.е. матрица $6(1-p)R+pI = 6(1-p)F^TG^{-1}F+pI$ положительно определена.

[4]Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978.