КОЕ-ЧТО О ТЕНЗОРАХ

ТЕНЗОРЫ

Известно, что значения некоторых физических величин[1] (температуры, массы и т. п.) полностью определяются заданием *одного* числа. Такие величины физики называют *скалярами.*

Другие физические величины, так называемые *векторы* (сила, напряженность магнитного поля и т.п.), в каждой системе координат задаются *упорядоченными тройками* чисел - коэффициентами разложения по базису. Если базис ортонормированный, то эти числа – компоненты вектора – являются в то же время его проекциями на орты[2].

Существуют физические величины еще более сложной природы. Так, например, соотношение между вектором напряженности электрического поля ($\mathbf{E}$) и вектором электрического смещения ($\mathbf{D}$) в *линейном* случае имеет вид:

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3 \\ D_2 &= \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3 \\ D_3 &= \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3 \end{aligned} \quad . \tag{1}$$

Равенства (1) можно записать короче:

$$D_k = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{kj} E_j; \quad k = 1, 2, 3. \qquad (2).$$

Фигурирующая в (1) и (2) физическая величина (ϵ) – диэлектрическая проницаемость среды – в каждой системе координат задается *девятью* числами, которые можно записать в виде матрицы

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Соотношение (1) можно записать теперь в матричной форме:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \tag{4}$$

Связь между вектором напряженности магнитного поля ($\mathbf{H}$) и вектором магнитной индукции ($\mathbf{B}$) определяется в *линейном* случае равенствами

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu_{11}H_1 + \mu_{12}H_2 + \mu_{13}H_3 \\ B_2 &= \mu_{21}H_1 + \mu_{22}H_2 + \mu_{23}H_3 \\ B_3 &= \mu_{31}H_1 + \mu_{32}H_2 + \mu_{33}H_3 \end{aligned}$$

или

$$B_k = \sum_{j=1}^{3} \mu_{kj} H_j; \quad k = 1, 2, 3,$$

или, наконец,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

где

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}.$$

---

[1] В отличие от физики в математике слово "величина" не используется!

[2] Не следует говорить, что "вектор определяется его величиной и направлением", ибо придется объяснять, что такое величина и что такое направление, а такое объяснение обычно сводится к размахиванию руками.

Здесь μ – магнитная проницаемость среды – физическая величина, задаваемая в каждом базисе девятью числами.

Отметим, что в изотропной среде матрицы диэлектрической и магнитной проницаемости имеют вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} = \varepsilon \cdot I; \qquad \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} = \mu \cdot I.$$

Здесь ε и μ – числа, вектор $\mathbf{D}$ коллинеарен вектору $\mathbf{E}$, а вектор $\mathbf{B}$ – вектору $\mathbf{H}$.

Физические величины, задаваемые в каждом координатном базисе девятью числами, называют *тензорами второго ранга.*

Приведем еще два примера тензоров второго ранга. В теории упругости рассматривается *тензор напряжений* (σ), который связывает между собой вектор внутренних сил ($\mathbf{F}$) и вектор ($\mathbf{N}$) внешней нормали к площадке, на которую эти силы действуют:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_{11}N_1 + \sigma_{12}N_2 + \sigma_{13}N_3 \\ F_2 &= \sigma_{21}N_1 + \sigma_{22}N_2 + \sigma_{23}N_3 \\ F_3 &= \sigma_{31}N_1 + \sigma_{32}N_2 + \sigma_{33}N_3 \end{aligned}$$

или

$$F_k = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{kj} N_j; \quad k = 1, 2, 3,$$

или, наконец,

$$\mathbf{F} = \sigma \mathbf{N},$$

где

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Также в теории упругости работает *тензор деформаций* (u), связывающий вектор (η), соединяющий две близкие точки тела до деформации и вектор ($\delta\eta$) – изменение вектора (η) за счет чистой деформации:

$$\begin{aligned} \delta\eta_1 &= u_{11}\eta_1 + u_{12}\eta_2 + u_{13}\eta_3 \\ \delta\eta_2 &= u_{21}\eta_1 + u_{22}\eta_2 + u_{23}\eta_3 \\ \delta\eta_3 &= u_{31}\eta_1 + u_{32}\eta_2 + u_{33}\eta_3 \end{aligned}$$

или

$$\delta\eta_k = \sum_{j=1}^{3} u_{kj} \eta_j; \quad k = 1, 2, 3,$$

или, наконец,

$$\delta\eta = u\eta,$$

где

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Под воздействием электрического поля ($\mathbf{E}$) в *пьезоэлектрике* возникают деформации (u). В линейном случае связь между ($\mathbf{E}$) и (u) определяется *тензором пьезоэлектрического эффекта* (d), который в каждом базисе задается *двадцатью семью* числами[3]

$$U_{km} = \sum_{j=1}^{3} d_{kmj} E_j; \quad k, m = 1, 2, 3.$$

Тензор пьезоэлектрического эффекта – тензор третьего ранга.

И, наконец, приведем пример тензора четвертого ранга – *тензора модулей упругости* (c), который связывает в линейном случае тензор напряжений (σ) и тензор деформаций (u) (закон Гука):

$$\sigma_{km} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{r=1}^{3} c_{kmjr} u_{jr}; \quad k, m = 1, 2, 3.$$

Тензор четвертого ранга в каждом базисе задается уже *восемьдесят одним* числом!

Итак, мы будем называть тензором ранга (валентности) n объект (физическую величину), который в каждом фиксированном базисе (системе декартовых прямоугольных координат) задается упорядоченным набором из 3^n чисел, причем эти наборы при переходе от одного базиса к другому изменяются по правилу, которое будет рассмотрено ниже.

Соответственно этому определению скаляр мы будем считать тензором нулевого ранга. Скаляр в любом базисе представляется одним и тем же числом.

Вектор – тензор первого ранга задается упорядоченным набором из трех чисел – одномерным массивом и может записываться в виде матрицы размера 1×3 – строки или матрицы размера 3×1 – столбца.

Тензор второго ранга задается двухмерным массивом и может записываться в виде квадратной матрицы.

Тензор третьего ранга задается трехмерным массивом, тензор четвертого ранга – четырехмерным массивом.

СОГЛАШЕНИЕ О СУММИРОВАНИИ

В тензорной алгебре принято соглашение, позволяющее упростить запись соотношений типа (2). Поскольку индекс суммирования всегда принимает три значения – 1,2,3 – уславливаются опускать знак суммы (Σ) и считать его присутствующим *по умолчанию*, если некоторый индекс в одночлене повторяется *дважды*.

Примеры.

1. Выражение $x_k y_k$(повторяется индекс k) понимается как

$$\sum_{k=1}^{3} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

.

2. Выражение $F_k = \sigma_{kj} N_j$ (повторяется индекс j) понимается как

$$F_k = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{kj} N_j = \sigma_{k1} N_1 + \sigma_{k2} N_2 + \sigma_{k3} N_3; \quad k = 1, 2, 3.$$

[3]Эти двадцать семь чисел (трехмерный массив) могли бы образовать "кубическую матрицу", но такой способ их представления не используется из-за его очевидной неэффективности

3. Выражение $\sigma_{km} = c_{kmjr}u_{jr}$ (повторяются индексы j и r) понимается как

$$\sigma_{km} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{r=1}^{3} c_{kmjr}u_{jr}; \quad k, m = 1, 2, 3.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ БАЗИСА

Мы ограничимся случаем ортонормированных базисов. *Новый* базис обычно задают, указывая компоненты его ортов в *старом* базисе. Построим матрицу b размера 3×3 так: ее первый столбец – компоненты первого *нового* орта в *старом* базисе, второй – компоненты второго *нового* орта в *старом* базисе, третий – компоненты третьего *нового* орта в *старом* базисе. Нетрудно увидеть, что матрица b унитарная, т.е. $b^T = b^{-1}$ или $b^T \cdot b = I$ (единичная матрица). Введем обозначение $t = b^T$. Пусть компоненты вектора в старом базисе образуют столбец

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix},$$

а компоненты того же вектора в новом базисе (т.е. его проекции на новые орты) – столбец

$$V' = \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$V' = b^T \cdot V = tV \tag{5}$$

и, следовательно,

$$V = t^T \cdot V'.$$

Подробная запись формулы (5) имеет вид

$$V_k' = \sum_{j=1}^{3} t_{kj}V_j; \quad j = 1, 2, 3$$

или (с учетом соглашения о суммировании)

$$V_k' = t_{kj}V_j. \tag{6}$$

Формула (6) дает правило преобразования компонент вектора (тензора первого ранга) при переходе от одного ортонормированного базиса к другому (тоже ортонормированному).

Пусть в старом базисе заданы α – тензор второго ранга, W и V – тензоры первого ранга (векторы) и

$$W = \alpha V \quad \text{матричная запись.}$$

Подставляя сюда по правилу (5)

$$W = t^T W', \quad V = t^T V',$$

получим

$$t^T W' = \alpha t^T V' \quad \text{или} \quad W' = (t\alpha t^T)V' \quad \text{или} \quad W' = \alpha' V',$$

где $\alpha' = t\alpha t^T$ (в матричной записи) или

$$\alpha'_{km} = t_{kj} t_{mr} \alpha_{jr}. \tag{7}$$

Формула (7) дает правило преобразования компонент тензора второго ранга при переходе от одного ортонормированного базиса к другому (тоже ортонормированному).

Аналогично можно получить формулы преобразования компонент тензоров третьего и четвертого рангов:

$$\alpha'_{kmn} = t_{kj} t_{mr} t_{nq} \alpha_{jrq},$$
$$\alpha'_{kmns} = t_{kj} t_{mr} t_{nq} t_{sp} \alpha_{jrqp}.$$

СОБСТВЕННЫЙ БАЗИС СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА ВТОРОГО РАНГА

Если тензор второго ранга α симметричен, т.е. $\alpha_{km} = \alpha_{mk}; \quad k, m = 1, 2, 3$, то в любом ортонормированном базисе его матрица симметрична. Из курса линейной алгебры известно, что собственные числа симметричной матрицы вещественны, а соответствующие им собственные векторы ортогональны. Нормировав эти собственные векторы, получим так называемый собственный ортонормированный базис тензора[4], в котором его матрица диагональна:

$$\alpha'_{km} = diag[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{– собственные числа матрицы тензора.}$$

СВЕРТЫВАНИЕ ТЕНЗОРА

Если в тензоре второго ранга

$$\alpha_{km} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

заменить оба индекса одной буквой, то в силу соглашения о суммировании получим скаляр (тензор нулевого ранга):

$$\alpha_{nn} = \sum_{n=1}^{3} \alpha_{nn} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}.$$

Этот скаляр – сумму диагональных элементов матрицы – называют *следом матрицы*. Например, если в тензоре второго ранга $D_m f_k$ – производной векторного поля $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (матрице Якоби)

$$D_m f_k = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

[4]Найти собственный базис тензора проще всего, обратившись к какой-нибудь среде конечного пользователя (MAPLE, MATLAB). Если Вас будут учить делать это методом "per anum", т.е. строить характеристический полином и т.д., – не поддавайтесь.

заменить индексы k и m на n, то получим скаляр

$$D_n f_n = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

– дивергенцию этого поля.

Замену пары различных индексов тензора одной буквой называют свертыванием тензора. Свертывание уменьшает ранг тензора на две единицы. Например, заменяя в тензоре четвертого ранга α_{kmpq} индексы k и q на j, получим тензор второго ранга

$$\beta_{mp} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jmpj} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{j11j} & \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{j12j} & \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{j13j} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{j21j} & \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{j22j} & \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{j23j} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{j31j} & \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{j32j} & \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{jmpj} \end{bmatrix}.$$

КОМПАКТНАЯ ЗАПИСЬ КОМПОНЕНТ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА

Описываемое в этом пункте использовалось во времена, когда наши мохнатые предки жили на деревьях. В силу инертности учебного процесса сохранились преподаватели-садисты, развлекающиеся этими ненужными вещами и сейчас. Не поддавайтесь!

Для задания симметричного тензора второго ранга достаточно указать не *девять*, а только *шесть* его компонент. Во времена "Очакова и покоренья Крыма" их записывали в виде строки размером (1×6). (Обратите внимание на порядок компонент в строке!)

$$[\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{23}, \alpha_{13}, \alpha_{12}].$$

Для задания тензора третьего ранга, симметричного по какой-нибудь паре индексов, достаточно указать не *двадцать семь*, а только *восемнадцать* его компонент. Их записывали в виде (3×6)-матрицы. Например, если $\alpha_{kmn} = \alpha_{mkn}$, то

$$\begin{bmatrix} \alpha_{111} & \alpha_{221} & \alpha_{331} & \alpha_{231} & \alpha_{131} & \alpha_{121} \\ \alpha_{112} & \alpha_{222} & \alpha_{332} & \alpha_{232} & \alpha_{132} & \alpha_{122} \\ \alpha_{113} & \alpha_{223} & \alpha_{333} & \alpha_{233} & \alpha_{133} & \alpha_{123} \end{bmatrix}.$$

Наконец, если тензор четвертого ранга симметричен как внутри двух пар индексов, так и между этими парами, т.е.

$$\alpha_{kmpq} = \alpha_{mkpq}; \quad \alpha_{kmpq} = \alpha_{kmqp}; \quad \alpha_{kmpq} = \alpha_{pqkm},$$

то для его задания достаточно указать не 81, а только 21 компоненту. Их располагают в нижнем треугольнике (6×6)-матрицы:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1111} & & & & & \\ \alpha_{1122} & \alpha_{2222} & & & & \\ \alpha_{1133} & \alpha_{2233} & \alpha_{3333} & & & \\ \alpha_{1123} & \alpha_{2223} & \alpha_{3323} & \alpha_{2323} & & \\ \alpha_{1113} & \alpha_{2213} & \alpha_{3313} & \alpha_{2313} & \alpha_{1313} & \\ \alpha_{1112} & \alpha_{2212} & \alpha_{3312} & \alpha_{2312} & \alpha_{1312} & \alpha_{1212} \end{bmatrix}.$$

Любителям "программирования" предоставляется возможность составить алгоритмы "упаковки" и "распаковки" симметричных тензоров. Помайтесь дурью!