

## II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

# Глава 1. ТЕОРИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

## 1.1. Криволинейный интеграл

Рассмотрим для начала типичную задачу.

Задача. Дано: 1) непрерывное векторное поле (сила)  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , не зависящее от времени

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{f}} \begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix};$$

2) гладкий путь (см. п.11.2 раздела "Математический анализ") точки приложения силы  $\mathbf{r} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \xrightarrow{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{bmatrix}.$$

Найти работу силы  $\mathbf{f}$  за промежутков времени  $[t_1, t_2]$ .

Из курса физики известно, что мощность силы равна скалярному произведению этой силы на скорость перемещения ее точки приложения, т.е.  $P = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$ ; работа силы равна интегралу  $A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$ .

1. Находим скорость перемещения точки

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [\varphi'(t) \quad \psi'(t) \quad \omega'(t)]^T.$$

2. Находим зависимость силы от времени

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(t) = \begin{bmatrix} f_x(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \\ f_y(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \\ f_z(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \end{bmatrix}.$$

3. Находим зависимость мощности от времени (скалярное произведение силы и скорости)  $P(t) = \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle(t)$ .

4. Интегрируя мощность по заданному промежутку времени, вычисляем искомую работу

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (f_x \cdot \varphi' + f_y \cdot \psi' + f_z \cdot \omega')(t) dt. \quad (1.1.1) \end{aligned}$$

Интеграл Римана с такой, как в (1.1.1), структурой подынтегральной функции часто встречается в прикладных задачах. Его принято называть *криволинейным* интегралом от векторного поля  $\mathbf{f}$  вдоль пути  $\ell$  от точки  $A$  до точки  $B$ . Пишут

$$(\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle.$$

Расшифровывается этот символ так:

1. задано кусочно непрерывное векторное поле  $\mathbf{f}$ ;
2. задан кусочно гладкий путь  $\ell$  с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$ , т.е. отображение  $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(\alpha) = A$ ,  $\mathbf{r}(\beta) = B$ .
3. По определению

$$(\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle.$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл от векторного поля

$$f_x(x, y, z) = y^2, \quad f_y(x, y, z) = z^2, \quad f_z(x, y, z) = x^2$$

вдоль пути, образованного пересечением полусферы  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  и цилиндра  $x^2 + y^2 = ax$  ( $a > 0$ ). Движение происходит против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(a, 0, 0)$ .

Этот пример взят нами из задачника. Обращаем внимание читателя на то, что по традиции вместо *уравнений* пути дано его *словесное описание*. Поскольку получение уравнений не имеет отношения к рассматриваемой теме, выпишем их без комментариев. Не забудьте лишь проверить направление движения!

$$\mathbf{r} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad x = a \cdot \cos^2(t), \quad y = a \cdot \sin(t) \cdot \cos(t), \quad z = a \cdot |\sin(t)|.$$

1. Строим композицию  $\mathbf{f} \circ \mathbf{r} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(t) = a^2 \cdot [\sin^2(t) \cdot \cos^2(t), \sin^2(t), \cos^4(t)]^T.$$

2. Вычисляем производную от пути (скорость):

$$\mathbf{r}'(t) = a \cdot [-2\cos(t) \cdot \sin(t), \cos^2(t) - \sin^2(t), \text{sign}(t) \cdot \cos(t)]^T.$$

3. Вычисляем подынтегральную функцию (мощность):

$$P(t) = \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle(t) = a^3 (-2\sin^3 \cdot \cos^3(t) + \sin^2(t) \cdot (\cos^2(t) - \sin^2(t)) + \cos^5(t) \cdot \text{sign}(t)).$$

4. Вычисляем интеграл Римана (работу):

$$a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-2\sin^3(t)\cos^3(t) + \sin^2(t) \cdot (\cos^2(t) - \sin^2(t)) + \cos^5(t) \cdot \text{sign}(t)) dt = -\pi a^3/4.$$

Замечания. 1. Если  $\ell$  – замкнутый путь, то криволинейный интеграл по нему называют *циркулирующей* векторного поля вдоль  $\ell$  и пишут

$$\oint_{\ell} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle.$$

2. В теории электромагнитного поля *напряжением* между точками  $A$  и  $B$  вдоль пути  $\ell$  называют криволинейный интеграл

$$U_{AB} = (\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{E}, d\mathbf{r} \rangle,$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля.

*Электродвижущей силой* в контуре (замкнутом проводнике)  $\ell$  называют криволинейный интеграл

$$e = \oint_{\ell} \langle \mathbf{E}, d\mathbf{r} \rangle.$$

## 1.2. Поток векторного поля через поверхность

На рис.1.1 изображена площадка  $\Pi$ , имеющая форму параллелограмма, построенного на направленных отрезках  $\vec{\mathbf{p}}$  и  $\vec{\mathbf{q}}$ . Если жидкость течет через площадку с *постоянной* скоростью  $\mathbf{v}$ , то количество жидкости  $Q$ , протекающее через площадку  $\Pi$  в единицу времени, равно объему параллелепипеда, построенного на направленных отрезках  $\vec{\mathbf{p}}$ ,  $\vec{\mathbf{q}}$ ,  $\vec{\mathbf{v}}$ .

Число  $Q$  в гидродинамике называют *поток* жидкости через площадку  $\Pi$ . Чтобы указать, в каком направлении вычисляется поток, выбирают одно из двух направлений нормали к площадке (направленный отрезок  $\vec{\mathbf{n}}$  на рис.1.1) и говорят "поток жидкости через площадку  $\Pi$  в направлении  $\vec{\mathbf{n}}$  причем поток считается положительным, если положительна проекция скорости на направление нормали, и отрицательным, если эта проекция отрицательна.

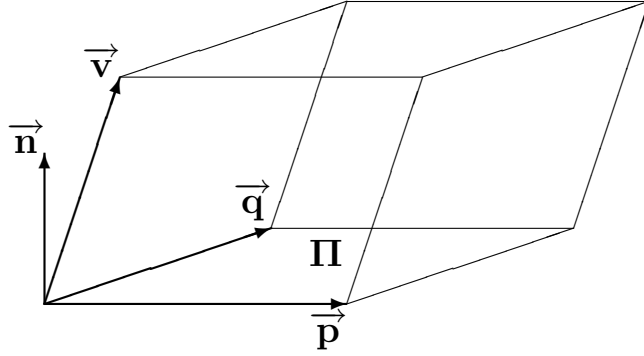


Рис.1.1

Из курса линейной алгебры известно, что объем параллелепипеда, построенного на направленных отрезках  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{v}$ , равен  $|\det([\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}])|$ . Отрезок  $\vec{p} \times \vec{q}$  перпендикулярен и  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  и, следовательно, коллинеарен нормали. Учитывая, что  $\det([\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}]) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{p} \times \mathbf{q} \rangle$ , получаем, что поток в направлении  $\vec{n}$  равен  $\det([\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}])$ , если  $\vec{n}$  сонаправлен  $\vec{p} \times \vec{q}$ , и равен  $-\det([\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}])$ , если  $\vec{n}$  противоположен  $\vec{p} \times \vec{q}$ .

Распространим теперь понятие потока на случай произвольного кусочно непрерывного векторного поля  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{f}} \begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

и кусочно гладкой поверхности (см. п.11.3 раздела "Математический анализ"), заданной отображением  $\mathbf{r} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \omega(u, v) \end{bmatrix}.$$

Возьмем произвольную точку  $(u_0, v_0) \in G$ . Рассмотрим прямоугольник  $\Omega$  с вершинами  $(u_0, v_0)$ ,  $(u_0 + \Delta u, v_0)$ ,  $(u_0, v_0 + \Delta v)$ ,  $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ , и образ этого прямоугольника – "лоскут" поверхности (рис.1.2), а также соответствующий кусок касательной плоскости – параллелограмм  $\Pi$ , построенный на направленных отрезках  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ , где

$$\mathbf{p} = D_1 \mathbf{r} \cdot \Delta u = \begin{bmatrix} D_1 \varphi(u_0, v_0) \\ D_1 \psi(u_0, v_0) \\ D_1 \omega(u_0, v_0) \end{bmatrix} \cdot \Delta u, \quad \mathbf{q} = D_2 \mathbf{r} \cdot \Delta v = \begin{bmatrix} D_2 \varphi(u_0, v_0) \\ D_2 \psi(u_0, v_0) \\ D_2 \omega(u_0, v_0) \end{bmatrix} \cdot \Delta v.$$

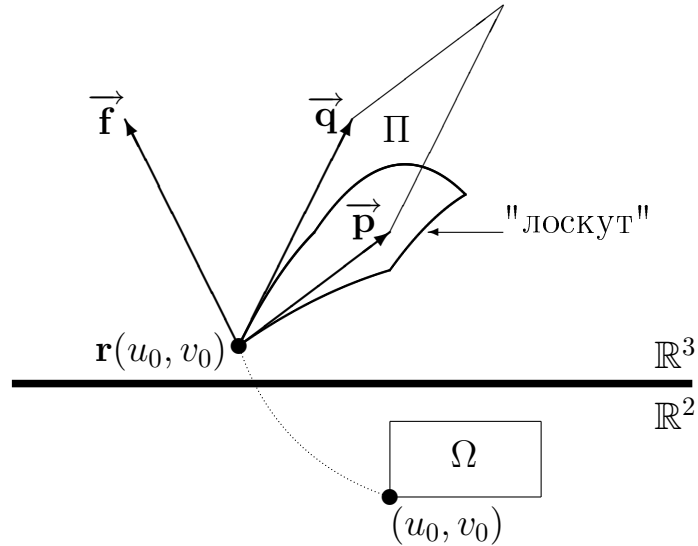


Рис.1.2

Вычислим векторное поле в той же точке

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} f_x(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \omega(u_0, v_0)) \\ f_y(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \omega(u_0, v_0)) \\ f_z(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \omega(u_0, v_0)) \end{bmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на направленных отрезках  $\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{f}}$ , при малых размерах площадки  $\Pi$  должен, по-видимому, мало отличаться от количества "жидкости протекающей через лоскут поверхности в единицу времени. Это (не имеющее доказательной силы) соображение дает основание ввести

Определение. Поток векторного поля  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  через поверхность, заданную отображением  $\mathbf{r} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , в направлении, определяемом вектором  $D_1\mathbf{r} \times D_2\mathbf{r}$ , называется двойной интеграл

$$\iint_G \det([\mathbf{f} \circ \mathbf{r}, D_1\mathbf{r}, D_2\mathbf{r}])$$

или, в более подробной записи,

$$\iint_G \det \left( \begin{bmatrix} f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v)) & D_1\varphi(u, v) & D_2\varphi(u, v) \\ f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v)) & D_1\psi(u, v) & D_2\psi(u, v) \\ f_z(\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v)) & D_1\omega(u, v) & D_2\omega(u, v) \end{bmatrix} \right) dudv.$$

Замечания. 1. Необходимо, чтобы направление, задаваемое вектором  $D_1\mathbf{r} \times D_2\mathbf{r}$ , во всех точках поверхности определяло "одну и ту же сторону" этой поверхности. Это возможно только для так называемых "двусторонних" поверхностей.

Не имея возможности в рамках нашего курса уточнить понятия *односторонней* и *двусторонней* поверхностей, ограничимся цитатой из учебника А.Д. Александрова и Н.Ю. Нецветаева<sup>4</sup> (Геометрия. – М.: Наука, 1990):

"Интересным примером [...] является так называемый "лист Мебиуса"<sup>5</sup>. Он выглядит как результат склеивания концов скрученной полоски бумаги. Лист Мебиуса – простейшая односторонняя поверхность. Что это значит? Обычно у поверхности две стороны. Вы можете покрасить одну сторону, скажем, в синий цвет, а другую – в красный, так что цвета нигде не будут граничить друг с другом. Начав же красить с любого места лист Мебиуса, Вы непременно закрасите его целиком – "со всех сторон"! Две стороны исходной полоски бумаги отождествились при склеивании".

Отметим еще, что в трехмерном пространстве все замкнутые поверхности без самопересечений – сфера, тор (поверхность "бублика") и т. п. – являются двусторонними, поэтому можно определять поток векторного поля "внутри" или "наружу".

2. Поток векторного поля  $\mathbf{f}$  через поверхность  $S$  часто называют поверхностным интегралом и обозначают  $\iint_S \langle \mathbf{f}, \mathbf{dS} \rangle$ .

Пример. Вычислить поток векторного поля

$$f_x(x, y, z) = x^2, \quad f_y(x, y, z) = y^2, \quad f_z(x, y, z) = z^2$$

через внешнюю поверхность расположенной в первом октанте части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Так же, как в случае криволинейного интеграла, приведенная формулировка (стандартная для старых задачников) содержит не относящуюся к теме часть задачи: необходимо написать параметрические уравнения поверхности, заданной словесным описанием. Приводим один из возможных вариантов записи этих уравнений:

$$\begin{aligned} x &= \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), & y &= \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi), & z &= \cos(\theta); \\ 0 &\leq \theta \leq \pi/2, & 0 &\leq \varphi \leq \pi/2. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Александр Данилович АЛЕКСАНДРОВ (1912-1999) – действительный член АН СССР, лауреат Международной премии имени Лобачевского, основатель советской школы "геометрии в целом" в 1952-1964 г.г. – ректор Ленинградского университета, мастер спорта по альпинизму.

Никита Юрьевич НЕЦВЕТАЕВ (род. 1959) – российский геометр, профессор Петербургского университета.

<sup>5</sup>Август Фердинанд МЕБИУС (A.F. Möbius, 1790-1868) – немецкий геометр.

1. Строим композицию

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(\theta, \varphi) = [\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\varphi), \sin^2(\theta) \cdot \sin^2(\varphi), \cos^2(\theta)]^T.$$

2. Вычисляем частные производные

$$D_\theta \mathbf{r}(\theta, \varphi) = [\cos(\theta) \cdot \cos(\varphi), \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi), -\sin(\theta)]^T;$$

$$D_\varphi \mathbf{r}(\theta, \varphi) = [-\sin(\theta) \cdot \sin(\varphi), \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), 0]^T.$$

Убедитесь самостоятельно, что вектор  $D_\theta \mathbf{r} \times D_\varphi \mathbf{r}$  в каждой точке сферы направлен в ее "внешнюю" сторону.

3. Вычисляем подынтегральную функцию ("элементарный поток")

$$\begin{aligned} & \det([\mathbf{f} \circ \mathbf{r}, D_\theta \mathbf{r}, D_\varphi \mathbf{r}]) = \\ & = \det \left( \begin{bmatrix} \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & -\sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin^2(\theta) \cdot \sin^2(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) & \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos^2(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ & = \sin(\theta) \cdot (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta) \cdot (\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi))). \end{aligned}$$

4. Вычисляем двойной интеграл Римана

$$\int_0^{\pi/2} \sin(\theta) d\theta \int_0^{\pi/2} (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta) \cdot (\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi))) d\varphi = 3\pi/8.$$

Замечание. Если бы вектор  $D_\theta \mathbf{r} \times D_\varphi \mathbf{r}$  "смотрел в другую сторону то полученный результат следовало бы умножить на  $(-1)$ .

### 1.3. Дивергенция векторного поля. Теорема Гаусса–Остроградского

Пусть  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  – непрерывно дифференцируемое векторное поле:

$$[x, y, z]^T \xrightarrow{\mathbf{f}} [f_x, f_y, f_z]^T.$$

Вычислим поток этого поля через кусочно гладкую замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую область  $V$ , в направлении "наружу".

Замечания. 1. Если обозначить

$$\mathbf{f}_1 = [f_x, 0, 0]^T, \quad \mathbf{f}_2 = [0, f_y, 0]^T, \quad \mathbf{f}_3 = [0, 0, f_z]^T,$$

то  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$  и, следовательно,

$$\iint_S \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{f}_1, d\mathbf{S} \rangle + \iint_S \langle \mathbf{f}_2, d\mathbf{S} \rangle + \iint_S \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle.$$



Мы ограничимся вычислением одного из трех полученных *однотипных* интегралов (например, третьего).

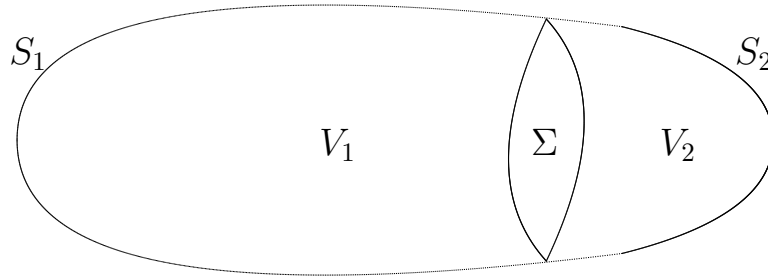


Рис.1.3

2. Если область  $V$  разделить на две части  $V_1$  и  $V_2$  кусочно гладкой поверхностью  $\Sigma$  (рис.1.3), то поток векторного поля  $\mathbf{f}$  через границу области  $V_1$  (через поверхность  $S_1$  и через поверхность  $\Sigma$ ) равен

$$\iint_{S_1} \langle \mathbf{f}, \mathbf{dS} \rangle + \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{f}, \mathbf{dS} \rangle,$$

а поток через границу области  $V_2$  (через поверхность  $S_2$  и через поверхность  $\Sigma$ ) равен

$$\iint_{S_2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{dS} \rangle + \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{f}, \mathbf{dS} \rangle.$$

Заметим, что потоки вычисляются в направлении внешних (по отношению к области) нормалей. Потоки через "перемычку"  $\Sigma$  в первой и во второй сумме равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Сумма их, очевидно, равна нулю и, следовательно, поток через границу области  $V$  равен сумме потоков через границы областей  $V_1$  и  $V_2$  :

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{f}, \mathbf{dS} \rangle = \iint_{\partial V_1} \langle \mathbf{f}, \mathbf{dS} \rangle + \iint_{\partial V_2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{dS} \rangle$$

(символом  $\partial V$  принято обозначать границу области  $V$ ).

Предположим теперь, что каждая прямая, параллельная координатной оси  $Oz$  и пересекающая нашу область, пересекает ее по отрезку (этому условию удовлетворяют, например, все выпуклые тела). Для такой области ограничивающая ее поверхность  $S$  представится как объединение трех частей (рис.1.4) –  $S_B$  (верхней),  $S_{бок}$  (боковой) и  $S_H$  (нижней).

На поверхности  $S_{бок}$  поле  $\mathbf{f}_z$  ортогонально нормали, т.е.  $\langle \mathbf{f}_z, \mathbf{n} \rangle = 0$ , и потому поток через эту поверхность равен нулю. Таким образом,

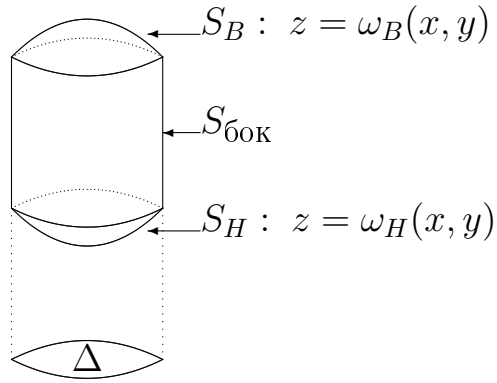


Рис.1.4

$$\iint_S \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{S_B} \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle + \iint_{S_H} \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle. \quad (1.3.1)$$

Поверхности  $S_B$  и  $S_H$  являются соответственно графиками функций  $\omega_B$  и  $\omega_H$ , которые определены на некоторой плоской области  $\Delta$  (проекции  $V$  на плоскость  $xOy$ ), включая ее границу.

Вычислим первый из интегралов в правой части (1.3.1). Поверхность  $S_B$  задается отображением  $\mathbf{r}_1 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega_B(x, y) \end{bmatrix}.$$

Поэтому  $D_1 \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ D_1 \omega_B \end{bmatrix}$ ,  $D_2 \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ D_2 \omega_B \end{bmatrix}$ , и

$$\begin{aligned} \iint_{S_B} \langle \mathbf{f}_3, dS \rangle &= \iint_{\Delta} \det \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_z & D_1 \omega_B & D_2 \omega_B \end{bmatrix} \right) dx dy = \\ &= \iint_{\Delta} f_z(x, y, \omega_B(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Знак плюс берется, поскольку вектор

$$D_1 \mathbf{r}_1 \times D_2 \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -D_1 \omega_B \\ -D_2 \omega_B \\ 1 \end{bmatrix},$$

очевидно, задает на  $S_B$  направление "вверх т.е. наружу  $V$  (третья координата этого вектора положительна).

Для поверхности  $S_H$ , задаваемой отображением  $\mathbf{r}_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega_H(x, y) \end{bmatrix},$$

аналогично получаем

$$\iint_{S_H} \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle = - \iint_{\Delta} f_z(x, y, \omega_H(x, y)) dx dy.$$

Знак минус берется, поскольку вектор

$$D_1 \mathbf{r}_2 \times D_2 \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -D_1 \omega_H \\ -D_2 \omega_H \\ 1 \end{bmatrix},$$

задает на  $S_H$  направление тоже "вверх т.е. *внутрь*  $V$ .

Подставляя результаты в (1.3.1), имеем

$$\iint_S \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{\Delta} \left( f_z(x, y, \omega_B(x, y)) - f_z(x, y, \omega_H(x, y)) \right) dx dy.$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$f_z(x, y, \omega_B(x, y)) - f_z(x, y, \omega_H(x, y)) = \int_{\omega_H(x, y)}^{\omega_B(x, y)} D_3 f_z(x, y, z) dz.$$

Следовательно,

$$\iint_S \langle \mathbf{f}_3, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{\Delta} \left( \int_{\omega_H(x, y)}^{\omega_B(x, y)} D_3 f_z dz \right) dx dy = \iiint_V D_3 f_z dx dy dz.$$

Аналогично можно получить

$$\iint_S \langle \mathbf{f}_1, d\mathbf{S} \rangle = \iiint_V D_1 f_x dx dy dz; \quad \iint_S \langle \mathbf{f}_2, d\mathbf{S} \rangle = \iiint_V D_2 f_y dx dy dz.$$

Складывая, получим (см. замечание 1)

$$\iint_S \langle \mathbf{f}, d\mathbf{S} \rangle = \iiint_V (D_1 f_x + D_2 f_y + D_3 f_z) dx dy dz.$$

Функция, стоящая под знаком тройного интеграла (след матрицы Якоби поля  $\mathbf{f}$ ) именуется *дивергенцией* этого векторного поля. Пишут

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = \operatorname{Sp}(D\mathbf{f}) = D_1 f_x + D_2 f_y + D_3 f_z.$$

Сформулируем теперь доказанную выше теорему.

Теорема Гаусса–Остроградского<sup>6</sup>. Поток векторного поля через замкнутую поверхность в направлении наружу равен интегралу от дивергенции этого поля по области, ограниченной этой поверхностью.

Замечания. 1. Поверхность предполагается кусочно гладкой, а поле – непрерывно дифференцируемым.

2. Мы доказали теорему для областей специального вида. Однако любую область, которая может встретиться на практике, можно разделить на конечное число кусков такого вида. В силу замечания **2** на с.414 поток векторного поля через полную поверхность области равен сумме потоков через полные поверхности ее кусков. Каждый из этих потоков преобразуется по доказанной теореме в интеграл от дивергенции поля по соответствующему куску, а сумма этих интегралов дает интеграл от дивергенции поля по всей области. Это рассуждение доказывает теорему для всех "не очень плохих" областей. Доказательство в общем случае мы проводить не будем.

3. Аналогично предыдущему замечанию, разделяя область на части, можно доказать теорему Гаусса–Остроградского для *кусочно гладкого, непрерывного векторного поля*  $\mathbf{f}$ .

4. Если  $\mathbf{v}$  – стационарное (не зависящее от времени) поле скоростей движения жидкости, то  $\iint_S \langle \mathbf{v}, \mathbf{dS} \rangle$  – это количество жидкости, вытекающей из области в единицу времени. Очевидно, оно равно разности между количеством жидкости, "образующейся" внутри этой области в единицу времени, и количеством жидкости, "исчезающей" там же и тогда же, т.е. разности между суммарной мощностью "источников" и суммарной мощностью "стоков находящихся внутри  $V$ ".

Средняя плотность мощности источников (стоки можно рассматривать как "отрицательные источники") равна

$$\frac{1}{\text{объем } V} \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx dy dz = \operatorname{div}(\mathbf{v})_{cp}.$$

---

<sup>6</sup>Михаил Васильевич ОСТРОГРАДСКИЙ (1801-1862) – русский математик, один из основателей петербургской математической школы, член Петербургской АН и ряда иностранных академий.

На этом основании в гидравлике дивергенцию поля скоростей называют плотностью мощности источников.

5. Поле, дивергенция которого равна нулю, называется *соленоидальным*, или *полем без источников*. По теореме Гаусса–Остроградского поток такого поля через любую замкнутую кусочно гладкую поверхность равен нулю.

## 1.4. Ротор векторного поля. Теорема Стокса

Теорема Гаусса–Остроградского устанавливает связь между значениями частных производных компонент векторного поля в области  $V$  и значениями поля на границе этой области – поверхности  $\partial V$ :

$$\iiint_V (D_1 f_x + D_2 f_y + D_3 f_z) dx dy dz = \iint_{\partial V} \langle \mathbf{f}, \mathbf{dS} \rangle.$$

Напомним, что теорема Ньютона – Лейбница связывает значения производной функции  $f$  в интервале  $]a, b[$  и значения этой функции на границе интервала – в точках  $a$  и  $b$ :

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Сформулируем без доказательства третью теорему того же типа – теорему Стокса<sup>7</sup>, которая связывает значения частных производных компонент векторного поля в области (на поверхности  $S$ ) и значения этого поля на границе области – кривой  $\partial S$ . Предварительно введем новое понятие.

Определение. *Ротором* непрерывно дифференцируемого векторного поля  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  называется векторное поле  $\mathbf{rot}(\mathbf{f}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , задаваемое формулой

$$\mathbf{rot}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} D_2 f_z - D_3 f_y \\ D_3 f_x - D_1 f_z \\ D_1 f_y - D_2 f_x \end{bmatrix}.$$

Замечания. 1. Иногда ротор называют *вихрем* векторного поля и обозначают  $\mathbf{curl}(\mathbf{f})$ .

<sup>7</sup>Джордж Габриель СТОКС (G.G. Stokes, 1819-1903) – английский физик и математик, член Лондонского Королевского общества, известен работами по оптике, гидродинамике и математической физике.

2. Если  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – плоское векторное поле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{bmatrix},$$

то ему можно сопоставить векторное поле  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{f}} \begin{bmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ротор такого поля равен

$$\mathbf{rot}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1 F_y - D_2 F_x \end{bmatrix} = (D_1 F_y - D_2 F_x) \cdot \mathbf{e}^{(3)}.$$

Иногда в случае плоского поля пишут

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = D_1 F_y - D_2 F_x.$$

3. Если  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  – дважды дифференцируемое векторное поле, то  $\mathbf{rot}(\mathbf{f})$  – соленоидальное поле.

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{f})) &= D_1(\mathbf{rot}(\mathbf{f}))_1 + D_2(\mathbf{rot}(\mathbf{f}))_2 + D_3(\mathbf{rot}(\mathbf{f}))_3 = \\ &= D_1(D_2 \mathbf{f}_z - D_3 \mathbf{f}_y) + D_2(D_3 \mathbf{f}_x - D_1 \mathbf{f}_z) + D_3(D_1 \mathbf{f}_y - D_2 \mathbf{f}_x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Теорема Стокса. Если  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  – непрерывно дифференцируемое векторное поле, а  $S$  – двусторонняя кусочно гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , то поток ротора поля  $\mathbf{f}$  через поверхность  $S$  равен циркуляции этого поля вдоль кривой  $\partial S$ , ограничивающей эту поверхность:

$$\iint_S \langle \mathbf{rot}(\mathbf{f}), \mathbf{dS} \rangle = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{f}, \mathbf{dr} \rangle.$$

При этом направление, в котором вычисляется поток, и направление обхода замкнутой кривой  $\partial S$  связаны правилом правого винта.

Замечания. 1. Так же, как и теорема Гаусса–Остроградского, эта теорема верна и для *кусочно гладкого, непрерывного* векторного поля  $\mathbf{f}$ .

2. Если векторное поле  $\mathbf{f}$  является градиентом скалярного поля (функционала)  $q$ , т.е.

$$\mathbf{f} = \nabla q, \tag{1.4.1}$$

то

$$\mathbf{rot}(\mathbf{f}) = \mathbf{rot}(\nabla q) = \begin{bmatrix} D_2(\nabla q)_3 - D_3(\nabla q)_2 \\ D_3(\nabla q)_1 - D_1(\nabla q)_3 \\ D_1(\nabla q)_2 - D_2(\nabla q)_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 D_3 q - D_3 D_2 q \\ D_3 D_1 q - D_1 D_3 q \\ D_1 D_2 q - D_2 D_1 q \end{bmatrix} \equiv \theta.$$

По теореме Стокса циркуляция вектора  $\mathbf{f}$  вдоль любого замкнутого контура, ограничивающего кусочно гладкую двустороннюю поверхность, равна нулю:

$$\oint_{\partial S} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{rot}(\mathbf{f}), d\mathbf{S} \rangle = 0. \quad (1.4.2)$$

Функционал  $q$  определен равенством (1.4.1) с точностью до аддитивной константы. Его называют *скалярным потенциалом векторного поля  $\mathbf{f}$* , а само векторное поле  $\mathbf{f}$  – *потенциальным*.

Серьезное предупреждение. Обратите внимание на то, что потенциал должен быть определен в области, содержащей не только контур, но и всю поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром. В противном случае соотношение (1.4.2) может не иметь места. Приведем простой пример.

Рассмотрим плоское векторное поле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{bmatrix}$$

и соответствующее ему трехмерное поле  $\mathbf{f}$  :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить (проделайте это!), что  $\mathbf{f} = \nabla\varphi$ , где  $\varphi$  – полярный угол точки  $(x, y)$ . Поэтому

$$(\varphi \circ \mathbf{r})' = \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{f} \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi \circ \mathbf{r})'(t) dt = \\ &= (\varphi \circ \mathbf{r})(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \varphi(B) - \varphi(A). \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Пусть теперь контур  $\ell$  – часть окружности (рис.1.5), задаваемая отображением  $\mathbf{r} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;  $x = a \cdot \cos(t)$ ,  $y = a \cdot \sin(t)$ ,  $z = 0$ .

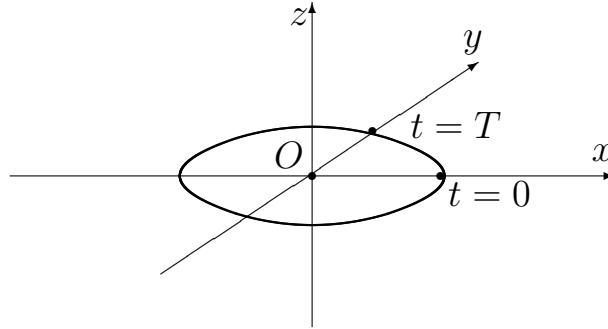


Рис.1.5

Тогда из (1.4.3) видно, что

$$(\ell) \int_{(A)}^{(B)} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle = T,$$

и при  $T = 2\pi$  получаем

$$\oint_{\ell} \langle \mathbf{f}, d\mathbf{r} \rangle = 2\pi.$$

Кажущееся противоречие с формулой (1.4.2) объясняется тем, что любая поверхность, ограниченная контуром  $\ell$ , пересекает ось  $Oz$ , на которой потенциал  $\varphi$  не определен.

## 1.5. Формулы интегрирования по частям

С помощью теорем Гаусса–Остроградского и Стокса можно получить формулы преобразования многомерных интегралов, аналогичные известной формуле интегрирования по частям.

Пусть  $V$  – область в  $\mathbb{R}^3$ , ограниченная кусочно гладкой поверхностью,  $u$  и  $v$  – кусочно гладкие, непрерывные функции. Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{f} = uv \cdot \mathbf{e}^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Заметим, что

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = D_k(uv) = D_k u \cdot v + u \cdot D_k v.$$

Теорема Гаусса–Остроградского дает

$$\iiint_V D_k u \cdot v = - \iiint_V u \cdot D_k v + \iint_{\partial V} \langle uv \cdot \mathbf{e}^{(k)}, d\mathbf{S} \rangle.$$



В случае, когда одна из функций  $u, v$  обращается в нуль на  $\partial V$ , формула интегрирования по частям принимает совсем простой вид:

$$\iiint_V D_k u \cdot v = - \iiint_V u \cdot D_k v. \quad (1.5.1)$$

Аналогично, если  $S$  – область в  $\mathbb{R}^2$ , ограниченная кусочно гладкой кривой,  $u$  и  $v$  – кусочно гладкие, непрерывные функции, одна из которых равна нулю на  $\partial S$ , теорема Стокса, примененная к векторному полю

$$\mathbf{f} = uv \cdot \mathbf{e}^{(k)}, \quad k = 1, 2,$$

дает формулу, аналогичную (1.5.1):

$$\iint_S D_k u \cdot v = - \iint_S u \cdot D_k v.$$

## 1.6. Интеграл от функции комплексной переменной

Известно, что в декартовой прямоугольной системе координат точка на плоскости может быть задана одним комплексным числом  $z = x + iy$ .

Пусть плоская кривая  $\ell$  задана отображением  $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \xrightarrow{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{bmatrix}.$$

Ее, очевидно, можно также задать одной комплекснозначной функцией вещественной переменной  $w : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ;  $w(t) = \varphi(t) + i \cdot \psi(t)$ .

Определение. Пусть  $G \subset \mathbb{C}$ ;  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  – кусочно непрерывная функция комплексной переменной. Интегралом от функции  $f$  по кусочно гладкой кривой  $\ell$  называется интеграл Римана

$$\int_{(\ell)} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(w(t)) w'(t) dt.$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получим (здесь  $f = F_1 + i \cdot F_2$ )

$$\begin{aligned} \int_{(\ell)} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( F_1(w(t)) \cdot \varphi'(t) - F_2(w(t)) \cdot \psi'(t) \right) dt + \\ &+ i \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \left( F_1(w(t)) \cdot \psi'(t) + F_2(w(t)) \cdot \varphi'(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Мы видим, что вычисление интеграла от функции комплексной переменной  $f = F_1 + i \cdot F_2$  сводится к вычислению двух *криволинейных* интегралов от плоских векторных полей  $[F_1, -F_2]^T$  и  $[F_2, F_1]^T$ .

Если  $f$  – *аналитическая* функция, то, как известно, компоненты поля  $F_1$  и  $F_2$  удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$D_1 F_1 = D_2 F_2, \quad D_1 F_2 = -D_2 F_1.$$

Поэтому

$$\mathbf{rot} \left( \begin{bmatrix} F_1 \\ -F_2 \end{bmatrix} \right) = (-D_1 F_2 - D_2 F_1) \cdot \mathbf{e}^{(3)} \equiv \theta;$$

$$\mathbf{rot} \left( \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} \right) = (D_1 F_1 - D_2 F_2) \cdot \mathbf{e}^{(3)} \equiv \theta.$$

Из теоремы Стокса следует теперь

Теорема Коши. Интеграл от *аналитической* функции по кусочно гладкой *замкнутой* кривой равен нулю.

## 1.7. Уравнения Максвелла

Электромагнитное поле – это упорядоченная пара векторных полей  $\mathbf{E} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;  $\mathbf{H} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , где

$$\mathbf{E} = [E_x(x, y, z, t), E_y(x, y, z, t), E_z(x, y, z, t)]^T$$

– *напряженность электрического поля*;

$$\mathbf{H} = [H_x(x, y, z, t), H_y(x, y, z, t), H_z(x, y, z, t)]^T$$

– *напряженность магнитного поля*.

Наряду с векторными полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в теории электромагнитного поля рассматривается еще два векторных поля: поле *электрического смещения*  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ , где  $\varepsilon$  –  $(3 \times 3)$ -матрица *диэлектрической проницаемости*, и поле *магнитной индукции*  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , где  $\mu$  –  $(3 \times 3)$ -матрица *магнитной проницаемости*.

В случае однородной и изотропной среды матрицы диэлектрической и магнитной проницаемости принимают вид  $\varepsilon \cdot I_3$  и  $\mu \cdot I_3$  (здесь  $\varepsilon$  и  $\mu$  – уже *числа*, а  $I_3$  – единичная матрица).

Теория Максвелла<sup>8</sup> позволяет находить электрическое и магнитное поля, создаваемые заданными электрическими зарядами и токами.

<sup>8</sup>Джеймс Клерк МАКСВЕЛЛ (J.C. Maxwell, 1831-1879) – шотландский физик, член Лондонского королевского общества. Первый сделал попытку создать общую теорию электромагнетизма, способствовал формированию теории векторного поля в виде отдельной математической дисциплины.

Уравнения Максвелла естественным образом формулируются с помощью введенных нами операций  $\mathbf{rot}$  и  $div$  :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$div(\mathbf{D}) = \rho; \quad div(\mathbf{B}) \equiv 0.$$

Здесь  $\rho$  – плотность объемных зарядов, а  $\mathbf{j}$  – вектор плотности токов проводимости.

В задачах электростатики  $\mathbf{j} = \mathbf{B} = \mathbf{H} \equiv \theta$ . Поэтому из четырех уравнений Максвелла остаются два:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = \theta; \quad div(\mathbf{D}) = \rho. \quad (1.7.1)$$

Если искать вектор-функцию  $\mathbf{E}$  в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi,$$

(функция  $\varphi$  называется *скалярным потенциалом* электрического поля), то первое уравнение (1.7.1) выполняется автоматически (см. замечание 2 на с.68), а второе дает

$$-div(\varepsilon \cdot \nabla\varphi) = \rho.$$

В случае однородной изотропной среды это уравнение переписется так:

$$-div(\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (1.7.2)$$

Замечание. Дифференциальный оператор

$$div(\nabla\varphi) = D_1D_1\varphi + D_2D_2\varphi + D_3D_3\varphi,$$

стоящий в левой части (1.7.2), называется *оператором Лапласа* и обозначается  $\Delta\varphi$ .

Уравнение

$$-\Delta\varphi = f,$$

именуемое *уравнением Пуассона*, возникает не только в задачах электростатики, но и во многих других прикладных задачах.

Пример. В заключение главы рассмотрим элементарную теорию идеального трансформатора<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup>Мы надеемся, что студент *технического* университета когда-нибудь видел трансформатор.

Протекающий по первичной обмотке трансформатора переменный ток создает в ферромагнитном сердечнике переменное магнитное поле. Мы назвали трансформатор идеальным, имея в виду, что магнитный поток распространяется только в сердечнике (потоки рассеяния в воздухе отсутствуют).

На рис.1.6 изображены сердечник и обмотка трансформатора в разрезе.

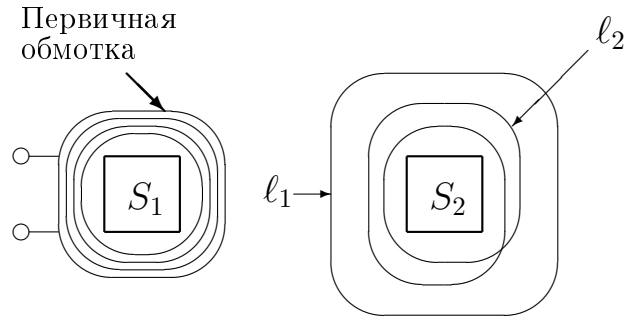


Рис.1.6.  $S_1, S_2$  – сечения сердечника

Если проводник (замкнутый контур  $\ell_1$  на рис.1.6) охватывает сечение сердечника  $S_2$ , то возникающая в этом проводнике электродвижущая сила равна

$$e = \oint_{\ell_1} \langle \mathbf{E}, d\mathbf{r} \rangle. \quad (1.7.3)$$

Применим теорему Стокса к (1.7.3). В силу первого из уравнений Максвелла  $\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , и мы получим

$$e = \iint_{S_2} \langle -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \rangle$$

(интеграл берется по  $S_2$ , поскольку в области между  $S_2$  и контуром магнитная индукция  $\mathbf{B}$  равна нулю (трансформатор идеальный!)).

Если проводник ( $\ell_2$  на рис.1.6) обходит вокруг  $S_2$  дважды, электродвижущая сила увеличивается в два раза (интеграл по всему пути равен сумме интегралов по его частям). Отсюда следует известный закон: *напряжение на вторичной обмотке трансформатора пропорционально числу витков этой обмотки.*

## Глава 2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

### 2.1. Равномерное приближение

Как известно, компьютер "умеет" выполнять четыре арифметических действия. С их помощью можно вычислять значения полиномов и рациональных дробей. Как же вычисляются значения других стандартных функций? Рассмотрим этот вопрос на примере функции  $\sin$ .

В силу известных свойств синуса его вычисление при любом значении операнда может быть сведено к вычислению на сегменте  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Эту задачу мы и будем решать.

Напомним, что синус был *определен* как сумма сходящегося ряда

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Поэтому кажется естественным вычислять его значения с помощью отрезка этого ряда, т.е. полинома Тейлора, выбрав порядок этого полинома  $n$  настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta_n = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} (|\sin(x) - T_{\sin}(n, x)|) \leq \varepsilon$$

( $\varepsilon$  – допустимая погрешность).

Однако полином  $T_{\sin}$ , как и всякий полином Тейлора, хорошо (лучше всех полиномов того же порядка) имитирует поведение функции в *достаточно малой* окрестности точки (в данном случае – нуля). Ни из чего не следует, что он будет обладать этим свойством на сегменте  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Поэтому представляется, что можно, не увеличивая порядок полинома, уменьшить погрешность  $\Delta_n$ .

Совсем очевидно это для полинома первого порядка (функции-константы). Полином Тейлора в этом случае – тождественный нуль, и  $\Delta_1 = 1$ . В то же время, если взять полином  $S_1(x) \equiv 0.5$ , то  $\Delta_1 = 0.5$ . Отметим, что наибольшего значения *отклонение*  $|S_1(x) - \sin(x)|$  достигает на концах сегмента.

Рассмотрим теперь полиномы второго порядка. На рис.2.1 изображены графики синуса и его полинома Тейлора  $T_{\sin}(2, x) = x$ . Видно, что отклонение растет на сегменте и его наибольшее значение достигается при  $x = \frac{\pi}{2}$ :  $\Delta_2 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.5708$ . Если же построить хорду, соединяющую концы дуги, и касательную к графику синуса, параллельную этой

хорде, то прямая, лежащая точно посередине между хордой и касательной (рис.2.2) – это график полинома  $S_2(x) = a + b \cdot x$ , где

$$a = \frac{1}{2} \sin\left(\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right), \quad b = \frac{2}{\pi}.$$

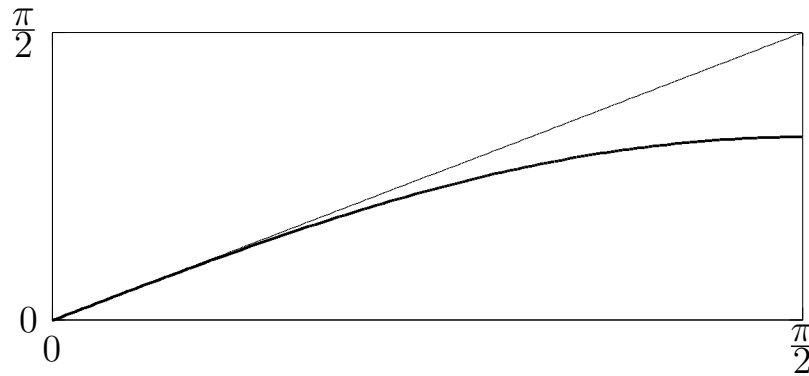


Рис.2.1. Графики  $\sin(x)$  (жирная линия) и  $T_{\sin}(2, x)$

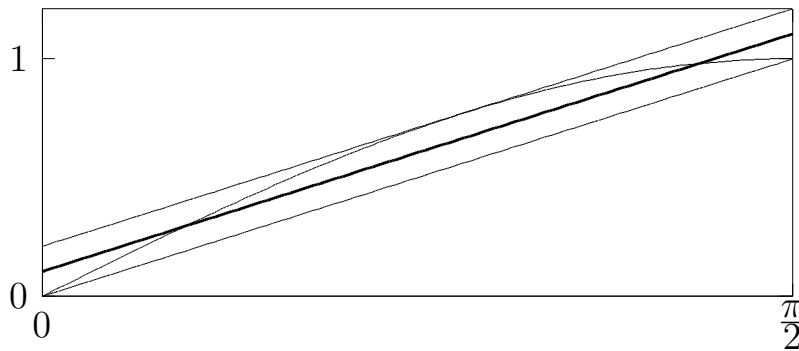


Рис.2.2. График  $S_2(x)$  (жирная линия)

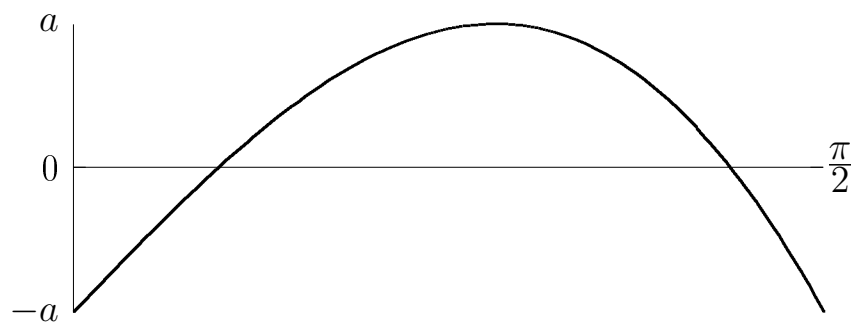


Рис.2.3. График функции  $\sin(x) - S_2(x)$

Из рис.2.3 видно, что наибольшего значения отклонение достигает в трех точках:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \arccos(b)$  и  $x_2 = \pi/2$ . При этом  $\Delta_2 = a \approx 0.1053$ , что существенно меньше, чем при замене синуса его полиномом Тейлора.

Полиномы  $S_1$  и  $S_2$  – это простейшие полиномы *наилучшего равномерного приближения* для функции  $\sin$  на сегменте  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Можно показать, что имеет место

Теорема. 1. Для всякой непрерывной на сегменте  $[\alpha, \beta]$  функции  $f$  и всякого  $n \in \mathbb{N}$  существует единственный полином  $S_n$  *порядка  $n$* , для которого  $\Delta_n = \max_{[\alpha, \beta]} (|S_n(x) - f(x)|)$  *меньше*, чем для любого другого полинома того же порядка. Этот полином называют полиномом наилучшего равномерного приближения порядка  $n$  для функции  $f$  на  $[\alpha, \beta]$ .

2. Для полинома наилучшего равномерного приближения  $\Delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Поэтому непрерывную на сегменте функцию можно равномерно приблизить полиномом с любой точностью, если взять порядок полинома достаточно большим (это утверждение называется *теоремой Вейерштрасса*).

3. Полином наилучшего равномерного приближения характеризуется следующим свойством: на сегменте  $[\alpha, \beta]$  существует по крайней мере  $n + 1$  такая точка  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , что  $|S_n(x_k) - f(x_k)| = \Delta_n$ , причем знаки разности  $S_n(x_k) - f(x_k)$  в этих точках чередуются. Точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  называются точками *чебышевского*<sup>10</sup> *альтернанса*.

На рис.2.4 показан график разности между синусом и его полиномом наилучшего равномерного приближения десятого порядка на  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . На графике хорошо видны 11 точек альтернанса. Здесь  $\Delta_{10} \approx 3.3 \times 10^{-11}$ . Заметим, что у полинома Тейлора того же порядка  $\Delta_{10} \approx 3.6 \times 10^{-6}$  (!).

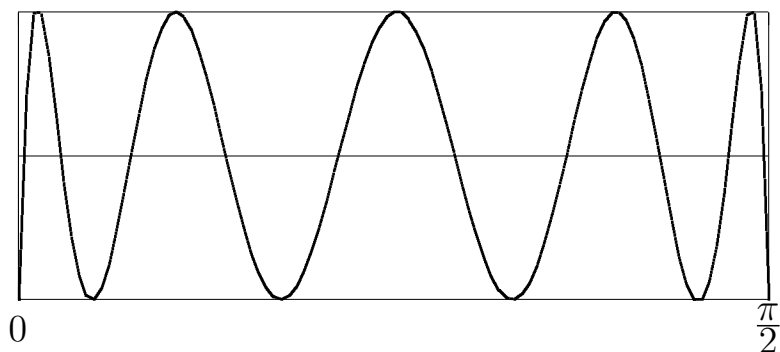


Рис.2.4. График функции  $\sin(x) - S_{10}(x)$

<sup>10</sup>Пафнутий Львович ЧЕБЫШЕВ (1821-1894) – русский математик и механик, основатель Петербургской математической школы, член Петербургской, Берлинской, Болонской, Парижской, Шведской АН, член Лондонского Королевского общества, почетный член многих русских и иностранных научных обществ и университетов.

Замечания. 1. Полиномы наилучшего равномерного приближения используются для вычисления значений стандартных функций в компьютерах (конечно, это не единственный способ).

2. "Приближение функций" состоит, по существу, в замене одной функции ("неудобной" в каком-то смысле) на другую ("удобную" в том же смысле). Возникающая при замене погрешность должна, конечно, лежать в допустимых пределах. С приближением функций мы встречались ранее в задаче численного интегрирования. При этом подынтегральная функция заменялась полиномиальным интерполяционным сплайном.

В этом пункте мы рассмотрели применение приближения функций для вычисления значений этих функций. Здесь было естественно принять в качестве погрешности приближения наибольшее значение отклонения приближающей функции от приближаемой.

Заметим, что введя в линейном пространстве функций, непрерывных на сегменте  $[\alpha, \beta]$ , норму по правилу

$$\|f\|_C = \max_{x \in [\alpha, \beta]} (|f(x)|)$$

(убедитесь, что это действительно норма!), мы представим введенную нами погрешность в виде нормы разности между приближаемой и приближающей функциями:

$$\Delta_n = \|f - S_n\|_C.$$

В других применениях приближения функций естественным оказывается использование других норм для определения понятия "погрешность приближения".

В курсе линейной алгебры изучалась задача о сглаживании экспериментальных данных полиномами, ортогональными на сетке. Эту задачу можно рассматривать и как задачу приближения заданного вектора линейной комбинацией векторов из некоторого семейства. Напомним, что погрешность приближения при этом определялась как норма разности, порожденная скалярным произведением. Выбор такого определения объяснялся двумя причинами:

- 1) оно не противоречит здравому смыслу;
- 2) имеет простую геометрическую интерпретацию;
- 3) задача сводится к системе *линейных* уравнений.

В следующих пунктах будет рассмотрена аналогичная норма в пространстве кусочно непрерывных функций и задача приближения функций по этой норме.



## 2.2. Ортогональные последовательности функций

Рассмотрим линейное пространство кусочно непрерывных на сегменте  $[\alpha, \beta]$  комплекснозначных функций. Введем в этом пространстве скалярное произведение по правилу

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi \cdot \bar{\psi}. \quad (2.2.1)$$

Нетрудно убедиться в том, что такое определение удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, кроме одной. Если (что естественно) считать *нулем* линейного пространства функцию, равную нулю *тождественно*, то из равенства нулю скалярного квадрата функции *не следует*, что эта функция – нулевая (вспомните, что интеграл от функции, отличной от нуля в одной точке сегмента, равен нулю).

Чтобы устранить противоречие, *договариваются* не различать две функции, значения которых различны в *конечном* числе точек сегмента. При такой договоренности нулем введенного пространства будет всякая функция, *почти всюду* равная нулю (отличная от нуля лишь в конечном числе точек сегмента).

Теперь формула (2.2.1) действительно задает скалярное произведение. Введем также норму, порождаемую этим скалярным произведением:

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}. \quad (2.2.2)$$

Убедитесь, что все аксиомы нормы выполнены.

Замечание. Можно обобщить понятие "скалярное произведение" вводя так называемое *скалярное произведение с весом*:

$$\langle \phi, \psi \rangle_r = \int_{\alpha}^{\beta} r \phi \bar{\psi}. \quad (2.2.3)$$

Здесь  $r$  – *почти всюду положительная* функция, именуемая *весом*.

Скалярное произведение (2.2.1) – это скалярное произведение с весом  $r(x) \equiv 1$ .

Для дальнейшего нам потребуются *ортогональные* (в смысле скалярного произведения (2.2.3)) последовательности функций. Приведем четыре примера таких последовательностей.

Примеры. 1. Тригонометрическая последовательность<sup>11</sup>.

Пусть  $T > 0$ . Рассмотрим на сегменте  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  функции

$$\varphi_k(x) = \exp\left(i\frac{2\pi k}{T}x\right); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нетрудно убедиться, что (напомним, что  $\delta_{km}$  – символ Кронекера)

$$\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left(i\frac{2\pi(k-m)}{T}x\right) dx = T \cdot \delta_{km}.$$

Своим названием эта последовательность обязана тому, что долгое время вместо более удобных функций  $\exp\left(i\frac{2\pi k}{T}x\right)$  использовались функции  $\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)$  и  $\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)$ .

2. Функции Радемахера<sup>12</sup>.

Эти *кусочно постоянные* функции заданы на  $[0, 1]$  правилом

$$r_0(x) \equiv 1; \quad r_k(x) = \text{sign}(\sin(2^k \pi x)), \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{рис.2.5}).$$

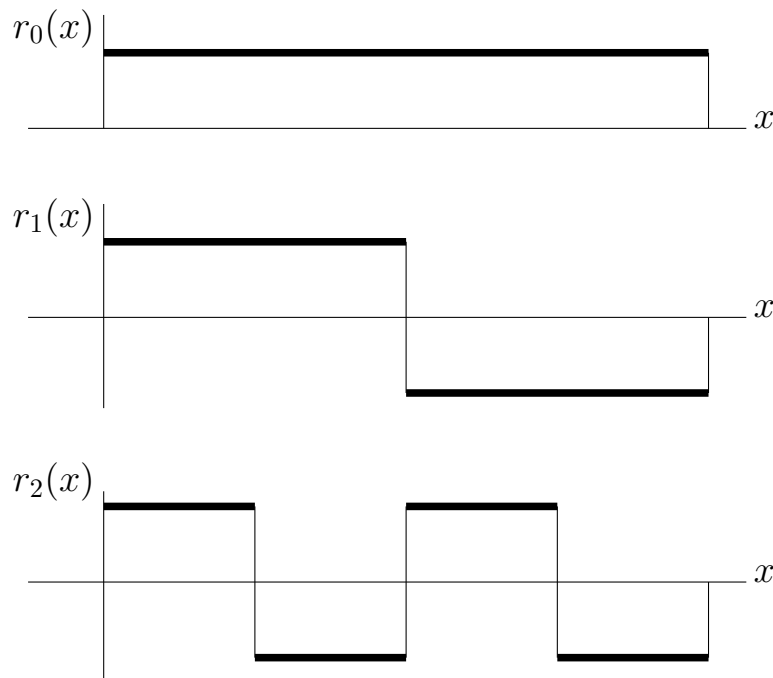


Рис.2.5. Графики трех первых функций Радемахера

<sup>11</sup>По естественным причинам удобнее задавать эту последовательность не на множестве натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , а на множестве целых чисел  $\mathbb{Z}$ .

<sup>12</sup>Ганс Адольф РАДЕМАХЕР (H.A. Rademacher, 1892-1969) – немецкий математик, с 1936 года работал в США.

Легко показать, что

$$\langle r_k, r_m \rangle = \int_0^1 r_k(x)r_m(x)dx = \delta_{km}.$$

3. Полиномы Лежандра<sup>13</sup>.

Эти полиномы заданы на  $[-1, 1]$  правилом

$$P_0(x) \equiv 1; \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot ((x^2 - 1)^k)^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что  $P_k$  – полином степени  $k$ . Непосредственное вычисление дает

$$\langle P_k, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_k(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2k+1} \cdot \delta_{km}.$$

4. Полиномы Чебышева.

Эти полиномы заданы на  $[-1, 1]$  правилом

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x)), \quad k = 0, 1, \dots$$

(проверьте, вычислив  $T_k$  для нескольких значений  $k$ , что это действительно полиномы).

Покажем, что полиномы Чебышева ортогональны с весом

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Действительно, подстановка  $t = \arccos(x)$  дает

$$\begin{aligned} \langle T_k, T_m \rangle_r &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x)T_m(x)dx = \int_0^\pi \cos(kt)\cos(mt)dt = \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos((k-m)t) + \cos((k+m)t))dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл, очевидно, равен нулю, если  $k \neq m$ .

---

<sup>13</sup>Адриен Мари ЛЕЖАНДР (А.М. Legendre, 1752-1833) - французский математик, член Парижской АН.

### 2.3. Среднеквадратическое приближение. Ряды Фурье

Пусть  $f$  – комплекснозначная, кусочно непрерывная на  $[\alpha, \beta]$  функция, а  $(\varphi_k)$  – ортогональная последовательность комплекснозначных функций, также кусочно непрерывных на  $[\alpha, \beta]$ .

Найдем линейную комбинацию первых  $n$  функций из этой последовательности, расстояние от которой до функции  $f$  (расстояние понимается как определенная равенством (2.2.2) норма разности!) будет минимальным, т.е. найдем такие  $n$  чисел  $a_1, \dots, a_n$ , что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\|$$

при любых числах  $b_1, \dots, b_n$ .

Как известно из курса линейной алгебры, если норма порождена скалярным произведением, всегда удобнее работать не с нормой, а с ее квадратом.

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - \left\langle f, \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k, f \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k, \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = 0$  при  $m \neq k$ , имеем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=1}^n b_k \langle \varphi_k, f \rangle + \sum_{k=1}^n b_k \bar{b}_k \|\varphi_k\|^2.$$

Обозначив  $\hat{f}_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2}$ , получим

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k \right\|^2 &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (-\bar{b}_k \hat{f}_k - b_k \overline{\hat{f}_k} + b_k \bar{b}_k) \|\varphi_k\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^n |\hat{f}_k - b_k|^2 \|\varphi_k\|^2. \end{aligned}$$

В этом равенстве переменными являются  $b_1, \dots, b_n$ . В силу неотрицательности последнего слагаемого искомый минимум достигается при  $b_k = \hat{f}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . При этом

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \widehat{f}_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (2.3.1)$$

Определение. Числа  $\widehat{f}_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2}$  называются *коэффициентами Фурье* функции  $f$  по ортогональной последовательности  $(\varphi_k)$ .

Последовательность сумм  $\sum_{k=1}^n |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2$ , очевидно, не убывает. Далее, из (2.3.1) видно, что

$$\sum_{k=1}^n |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2, \quad (2.3.2)$$

т.е. эта последовательность ограничена сверху. Поэтому числовой ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2$  сходится. Переходя в соотношении (2.3.2) к пределу ( $n = +\infty$ ), получим *неравенство Бесселя*<sup>14</sup>

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Если для некоторой функции  $f$  неравенство Бесселя превращается в равенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\widehat{f}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$$

(оно называется *равенством Парсеваля*<sup>15</sup>), то (2.3.1) показывает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n \widehat{f}_k \varphi_k \right\|^2 = 0.$$

Естественно переписать это соотношение так:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{f}_k \varphi_k = f$$

и сказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k, \quad (2.3.3)$$

<sup>14</sup>Фридрих Вильгельм БЕССЕЛЬ (F.W. Bessel, 1784-1846) – немецкий астроном, член Берлинской АН, создатель Кенигсбергской обсерватории.

<sup>15</sup>Марк-Антуан ПАРСЕВАЛЬ (M.A. Parseval, 1755-1836) – французский математик.

именуемый *рядом Фурье* функции  $f$  по ортогональной последовательности  $(\varphi_k)$ , сходится к  $f$  в среднем квадратическом (или по норме (2.2.2)).

Обратно, если ряд (2.3.3) сходится к  $f$  в среднем квадратическом, то из формулы (2.3.1) несложно увидеть, что для функции  $f$  выполнено равенство Парсеваля.

Замечание. Равенство Парсеваля – аналог известной из школьной геометрии теоремы Пифагора.

Возникает вопрос: для всякой ли функции  $f$ , кусочно непрерывной на  $[\alpha, \beta]$ , справедливо равенство Парсеваля? Ответ на этот вопрос зависит от последовательности  $(\varphi_k)$ . Например, если "изъять" из последовательности один элемент  $\varphi_m$ , то для функции  $f = \varphi_m$  все коэффициенты Фурье будут равны нулю, и равенство Парсеваля не будет иметь места.

Как известно, ортогональный базис в  $n$ -мерном унитарном пространстве обладает двумя свойствами:

1. Только нулевой вектор ортогонален всем элементам базиса.
2. Любой вектор пространства представим в виде линейной комбинации элементов базиса.

Аналогично введем понятие ортогонального базиса в бесконечномерном пространстве со скалярным произведением (в нашем случае – в пространстве кусочно непрерывных функций).

Определение. Ортогональная на  $[\alpha, \beta]$  последовательность  $(\varphi_k)$  называется *ортогональным базисом* (или просто базисом) в пространстве кусочно непрерывных функций, если для *любой* кусочно непрерывной на  $[\alpha, \beta]$  функции имеет место равенство Парсеваля (т.е. ряд Фурье любой кусочно непрерывной функции  $f$  по этой последовательности сходится к  $f$  в среднем квадратическом).

Если ортогональная последовательность  $(\varphi_k)$  является базисом, то единственная кусочно непрерывная функция, ортогональная всем  $\varphi_k$  – это нулевой элемент пространства (т.е. функция, отличная от нуля лишь в конечном числе точек). Действительно, если  $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то все коэффициенты Фурье функции  $f$  равны нулю. Поэтому в силу равенства Парсеваля  $\|f\| = 0$ .

Пример. Можно показать, что тригонометрическая последовательность и полиномы Лежандра – базисы в пространстве кусочно непрерывных функций, а функции Радемахера – нет (проверьте, что функция  $\cos(2\pi x)$  ортогональна на  $[0, 1]$  всем функциям Радемахера).

Замечание. Все введенные в этом пункте определения переносятся на случай скалярного произведения с весом (2.2.3). Например, *можно показать, что* последовательность полиномов Чебышева – базис в пространстве кусочно непрерывных функций на  $[-1, 1]$  с весом  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Естественно задать вопрос: сходится ли к функции  $f$  во всех точках сегмента сходящийся к ней в среднем квадратическом ее ряд Фурье?

В общем случае ответ будет отрицательным. Существуют, например, "патологические" функции (непрерывные на сегменте  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ !), ряд Фурье которых по тригонометрической системе расходится на бесконечном множестве точек сегмента!

Для положительного ответа на вопрос следует предъявить к функции  $f$  дополнительные требования. Пример таких требований дает теорема Дирихле, сформулированная в следующем пункте.

## 2.4. Тригонометрические ряды Фурье и интегральные преобразования Фурье

Тригонометрическими рядами Фурье называют ряды Фурье по тригонометрической последовательности функций  $\exp(i\frac{2\pi k}{T}t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \exp\left(i\frac{2\pi k}{T}t\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k \exp\left(i\frac{2\pi k}{T}t\right),$$

где, согласно (2.3.3),

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}t\right) dt. \quad (2.4.1)$$

С точки зрения представления функций, заданных на сегменте, тригонометрические ряды Фурье не выделяются из рядов Фурье по другим ортогональным базисам (например, по полиномам Лежандра). Их особая роль выявляется при представлении *периодических* функций, часто встречающихся в приложениях.

*Можно показать, что для тригонометрических рядов Фурье верна*

Теорема Дирихле. 1. Тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной и *кусочно монотонной* на сегменте  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  функции  $f$  сходится во всех точках этого сегмента.

2. Если обозначить его сумму  $S$ , то

$$S\left(-\frac{T}{2}\right) = S\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{f\left(-\frac{T}{2} + 0\right) + f\left(\frac{T}{2} - 0\right)}{2};$$

$$S(t) = \frac{f(t - 0) + f(t + 0)}{2} \quad \text{при} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}.$$

*Сумма тригонометрического ряда Фурье кусочно непрерывной и кусочно монотонной функции  $f$  совпадает с этой функцией в точках ее непрерывности и равна полусумме левого и правого пределов  $f$  в точках ее разрыва.*

Замечание. Для комплекснозначной функции  $f$  под кусочной монотонностью здесь и далее понимается кусочная монотонность функций  $Re(f)$  и  $Im(f)$ .

Рассмотрим кусочно непрерывную и кусочно монотонную периодическую функцию  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  с периодом  $T$ . Обозначим  $f_T$  ее сужение на  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ .

Разложим  $f_T$  в ряд Фурье по тригонометрической последовательности. В силу теоремы Дирихле при  $|t| \leq \frac{T}{2}$  имеет место равенство

$$\frac{f(t - 0) + f(t + 0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right), \quad (2.4.2)$$

где коэффициенты  $\hat{f}_k$  заданы формулой (2.4.1).

Поскольку и левая, и правая части (2.4.2) –  $T$ -периодические функции, это равенство верно при всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Замечание. В теории сигналов функция  $f$  описывает сигнал, состоящий из последовательности одинаковых импульсов  $f_T$ .

Сумма ряда Фурье с коэффициентами (2.4.2) определена на всей оси и дает "аналитическое представление" этой последовательности импульсов. Сигнал при этом представляется в виде бесконечной суммы гармонических колебаний с частотами  $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), образующими равномерную сетку с шагом  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Последовательность коэффициентов Фурье  $(\hat{f}_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$  называют *комплексным Фурье-спектром* сигнала  $f$  и говорят, что спектр периодического сигнала *дискретен*.



Равенство Парсеваля

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f_T(t)|^2 dt = \|f_T\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_k|^2 \cdot T$$

показывает, как энергия импульса  $E = \|f_T\|^2$  распределена между этими частотами.

Пример. Рассмотрим периодическую последовательность треугольных импульсов, изображенную на рис.2.6, один импульс которой задается формулой

$$f_T(t) = \begin{cases} |1 - \frac{2t}{\tau}| & \text{при } |t| \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0 & \text{при } \frac{\tau}{2} < |t| \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

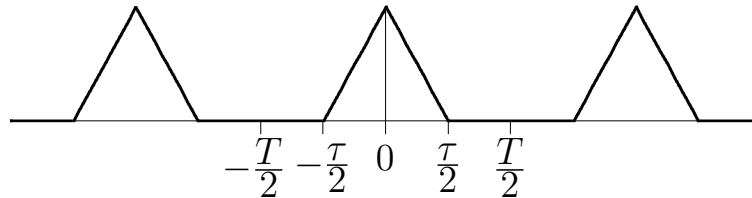


Рис.2.6

Найдем комплексный спектр этой последовательности:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left|1 - \frac{2t}{\tau}\right| \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \\ &= \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\omega_k \tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega_k \tau}{2}\right)^2} \quad \left(\omega_k = \frac{2\pi k}{T}\right). \end{aligned}$$

Существуют электротехнические устройства, именуемые частотными фильтрами, электрическая проводимость которых зависит от частоты приложенного напряжения. Например, в *идеальном фильтре нижних частот* проводимость на частотах, которые не выше критической, равна единице, а на всех остальных частотах – нулю. Если напряжение  $U$  на входе такого фильтра представить в форме его ряда Фурье

$$\frac{U(t-0) + U(t+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right),$$

то напряжение  $V$  на выходе будет иметь форму, определяемую отрезком этого ряда ( $N$  – номер критической частоты)

$$V(t) = \sum_{k=-N}^{+N} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right).$$

Пример. Пусть периодическая последовательность треугольных импульсов ( $\tau/T = 0.25$ ) подается на вход идеального фильтра нижних частот ( $N = 5$ ). На рис.2.7 изображен один период входной и выходной последовательностей.

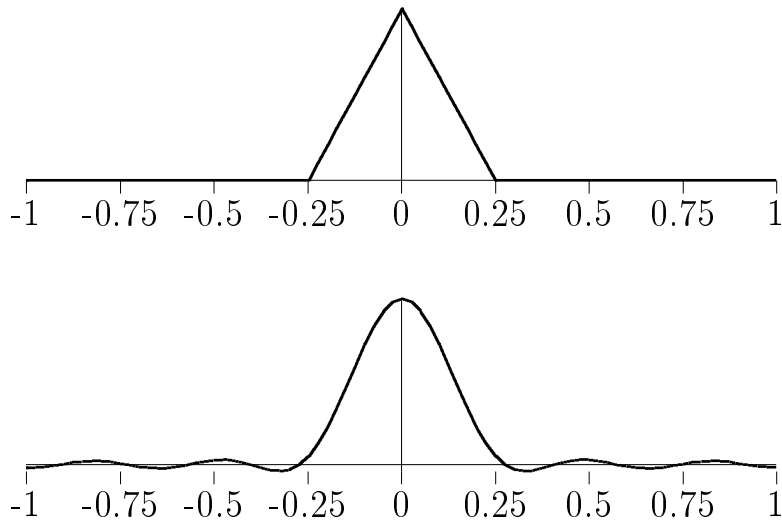


Рис.2.7

Пусть теперь  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  – *непериодическая* кусочно непрерывная и кусочно монотонная на  $\mathbb{R}$  функция. Возьмем *произвольное положительное* число  $T$  и рассмотрим  $f_T$  – сужение функции  $f$  на сегмент  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ . Запишем известное равенство

$$\frac{f_T(t-0) + f_T(t+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right); \quad |t| < \frac{T}{2}$$

(коэффициенты  $\hat{f}_k$  заданы формулой (2.4.1)).

Ряд Фурье функции  $f_T$  сходится на всей вещественной оси и, следовательно, определяет *новую* функцию

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Эта функция по теореме Дирихле совпадает с  $f$  почти всюду при  $|t| < T/2$ , а вне этого интервала является ее *периодическим продолжением* (рис.2.8).

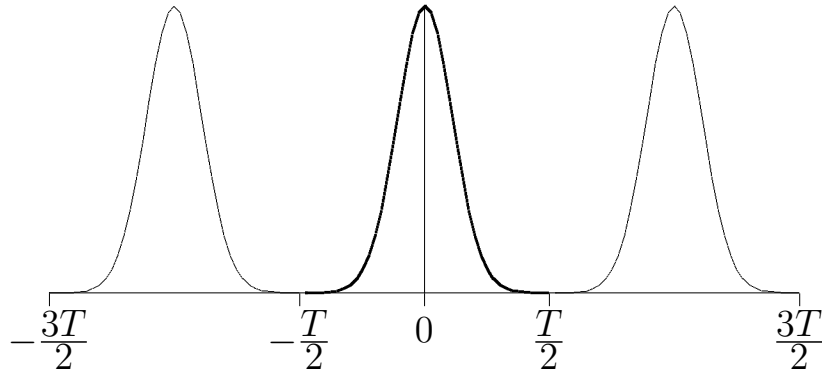


Рис.2.8. Функция  $f_T$  (жирная линия) и ее периодическое продолжение

Нетрудно заметить, что увеличивая  $T$ , мы увеличим длину интервала, на котором  $F$  почти всюду совпадает с  $f$ . Возникает естественный вопрос: нельзя ли перейти к пределу ( $T = +\infty$ )?

Пример. Рассмотрим одиночный треугольный импульс единичной высоты и ширины  $\tau$  :

$$f(t) = \begin{cases} |1 - \frac{2t}{\tau}| & \text{при } |t| \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Функция  $F$  (периодическое продолжение такого импульса), очевидно, совпадает с уже рассмотренной последовательностью треугольных импульсов (рис.2.6).

Если, сохраняя длину импульсов  $\tau$  в этой последовательности, увеличивать период их повторения  $T$ , то шаг частотной сетки  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  будет уменьшаться и одновременно будут уменьшаться порции энергии  $E_k = |\hat{f}_k|^2$ , переносимые на дискретных частотах  $\omega_k$ . Введем понятие *средней спектральной плотности* - отношения коэффициента Фурье к шагу частотной сетки

$$\tilde{f}(\omega_k) = \frac{\hat{f}_k}{\Delta\omega} = \frac{\tau}{2\pi} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\omega_k\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega_k\tau}{2}\right)^2}.$$

Тогда формула (2.4.2) переписется так:

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega_k) \cdot \exp(i\omega_k t) \cdot \Delta\omega. \quad (2.4.3)$$

Очевидно, ряд, стоящий справа, можно интерпретировать как квадратурную формулу левых прямоугольников для интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega, \quad (2.4.4)$$

где

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\tau}{2\pi} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt.$$

Поэтому можно рассчитывать, что при переходе к пределу ( $T = +\infty$ ) ряд (2.4.3) превратится в интеграл (2.4.4).

Действительно, *можно показать, что* имеет место

Теорема. Если  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  – кусочно непрерывная и кусочно монотонная на  $\mathbb{R}$  функция, причем  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$ , то имеет место равенство<sup>16</sup>

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega, \quad (2.4.5)$$

где

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt. \quad (2.4.6)$$

Формулу (2.4.6) называют *прямым*, а формулу (2.4.5) – *обратным преобразованием Фурье*.

Замечание. В теории сигналов функцию  $\tilde{f}$  называют *спектральной плотностью* сигнала  $f$  и говорят, что спектр такого сигнала *непрерывен*.

На рис.2.9 изображена (пунктиром) спектральная плотность одиночного треугольного импульса, а также средняя спектральная плотность соответствующей последовательности треугольных импульсов при различных отношениях  $\tau/T$ .

Серьезное предупреждение. В литературе встречается *по крайней мере шесть* разных способов записи интегральных преобразований Фурье.

<sup>16</sup>Напоминаем, что V.P. – *главное значение* интеграла.

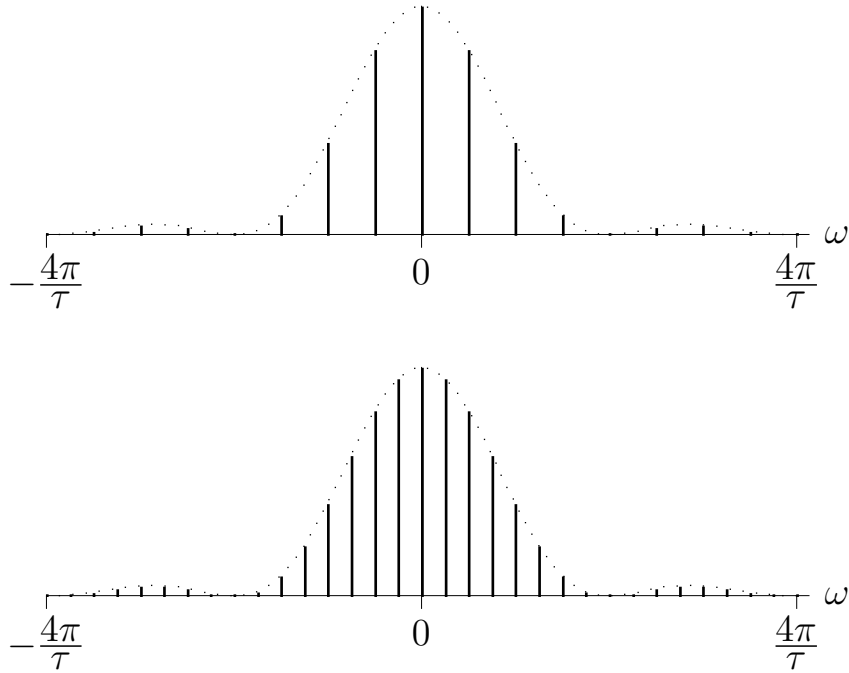


Рис.2.9. Верхний рисунок:  $\tau/T = 0.25$ ; нижний:  $\tau/T = 0.125$

Иногда множитель  $\frac{1}{2\pi}$  переносят из формулы (2.4.6) в формулу (2.4.5):

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots; \quad \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \dots$$

иногда его "равномерно распределяют" между двумя формулами:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots; \quad \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \dots$$

В некоторых книгах пишут в экспоненте знак "+" в прямом преобразовании, а знак "-" в обратном, например:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(i\omega t) dt;$$

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Некоторые (но не все) свойства преобразований Фурье справедливы для любой формы записи. Поэтому мы настоятельно рекомендуем, услышав слова "преобразование Фурье спросить: "А как это пишется?"

Замечание. Пусть  $f$  – оригинал, и  $\int_0^{+\infty} |f| < +\infty$ . Тогда преобразование Лапласа функции  $f$ , как известно, определено при  $Re(s) \geq 0$ , и при  $Re(s) = 0$ , очевидно, совпадает с одной из форм ее преобразования Фурье:

$$(\mathcal{L}f)(s)|_{s=i\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt.$$

Вообще свойства преобразований Фурье и Лапласа весьма схожи. В частности, если преобразование Фурье определено одной из формул

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(\pm i\omega t) dt,$$

то можно показать, что образ Фурье свертки двух функций равен произведению их образов Фурье:

$$\widetilde{(f_1 \otimes f_2)} = \tilde{f}_1 \cdot \tilde{f}_2.$$

# Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## 3.1. Содержательная задача, приводящая к интегральному уравнению

Рассмотрим трубку длиной  $\ell$ , заполненную веществом, поглощающим и рассеивающим свет. Поместим в левом ее конце стационарный источник, излучающий световой поток с плотностью  $I_0$ , направленный вправо (рис.3.1).

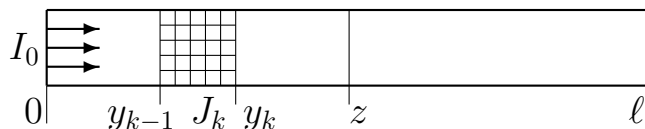


Рис.3.1

Будем считать, что в каждой точке трубки рассеяние светового потока происходит лишь в двух направлениях – вправо и влево. Тогда плотность потока постоянна в каждом поперечном сечении трубки и меняется только вдоль ее оси. Введем функцию  $\varphi : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  – линейную плотность светового потока, излучаемого в заданном сечении.

Очевидно, весь световой поток в сечении с абсциссой  $z$  можно разделить на две части: поток от источника излучения (с учетом поглощения и рассеяния в среде) и вторичный поток, созданный рассеивающей средой. Рассмотрим эти слагаемые по отдельности.

1. Плотность первичного потока, согласно закону Бугера<sup>17</sup>, равна

$$\Phi_1(z) = I_0 \cdot \exp(-\mu z)$$

( $\mu$  – показатель ослабления света в среде).

2. Для вычисления плотности вторичного (образованного рассеивающей средой) потока  $\Phi_2(z)$  построим некоторое разбиение  $\mathcal{P}$  сегмента  $[0, \ell]$  и выделим элементарный объем, ограниченный сечениями с абсциссами  $y_{k-1}$  и  $y_k$  (рис.3.1). Обозначим  $J_k = [y_{k-1}, y_k]$  и рассмотрим произвольную точку  $y \in J_k$ .

Если бы линейная плотность потока на  $J_k$  была постоянной и равнялась  $\varphi(y)$ , полное вторичное излучение этого элементарного объема

---

<sup>17</sup>Пьер БУГЕР (P. Bouguer, 1698-1758) – французский физик, один из основателей фотометрии; член Парижской АН и Лондонского королевского общества.

было бы равно  $\varphi(y) \cdot (y_k - y_{k-1})$ . Далее, если бы все это излучение исходило из сечения с абсциссой  $y$ , то его вклад в рассеянный световой поток, получаемый в сечении с абсциссой  $z$ , был бы равен

$$\frac{\rho}{2} \cdot \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) \cdot (y_k - y_{k-1})$$

(здесь  $\rho$  – показатель рассеяния среды; множитель  $\frac{1}{2}$  определяется из предположения, что половина рассеянного потока излучается вправо и половина – влево).

Очевидно неравенство  $m_k \leq \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) \leq M_k$ , где

$$m_k = \inf_{y \in J_k} \{ \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) \}, \quad M_k = \sup_{y \in J_k} \{ \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) \}.$$

Следовательно, плотность вторичного потока, получаемого в сечении с абсциссой  $z$ , удовлетворяет неравенству

$$\frac{\rho}{2} \cdot \sum_k m_k \cdot (y_k - y_{k-1}) \leq \Phi_2(z) \leq \frac{\rho}{2} \cdot \sum_k M_k \cdot (y_k - y_{k-1}). \quad (3.1.1)$$

Левая и правая части неравенства (3.1.1) представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю суммы Дарбу при разбиении  $\mathcal{P}$  для функции  $\rho/2 \cdot \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y)$ . Поэтому

$$\Phi_2(z) = \frac{\rho}{2} \cdot \int_0^\ell \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) dy.$$

Теперь уравнение баланса  $\varphi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$  принимает вид

$$\varphi(z) = I_0 \cdot \exp(-\mu z) + \frac{\rho}{2} \cdot \int_0^\ell \exp(-\mu|z - y|) \cdot \varphi(y) dy, \quad z \in [0, \ell].$$

## 3.2. Интегральное уравнение Фредгольма

Полученное в п.3.1 интегральное уравнение – пример *уравнения Фредгольма*<sup>18</sup> *второго рода*

$$x(t) = \int_\alpha^\beta K(t, \tau)x(\tau) d\tau + f(t). \quad (3.2.1)$$

---

<sup>18</sup>Эрик Ивар ФРЕДГОЛЬМ (E.I. Fredholm, 1866-1927) – шведский математик, член Стокгольмской АН. Известен своими работами по дифференциальным и интегральным уравнениям.



В уравнении (3.2.1)

$x$  – искомая функция  $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ;

$f$  – свободный член уравнения – вещественная, непрерывная на  $[\alpha, \beta]$  функция. Если  $f(t) \equiv 0$ , уравнение (3.2.1) называется *однородным*;

$K(t, \tau)$  – вещественная функция, заданная на квадрате  $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ .

Она либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода на диагонали квадрата  $t = \tau$  (т.е. непрерывна на каждом из двух треугольников, на которые эта диагональ делит квадрат – рис.3.2). Эту функцию называют *ядром* интегрального уравнения.

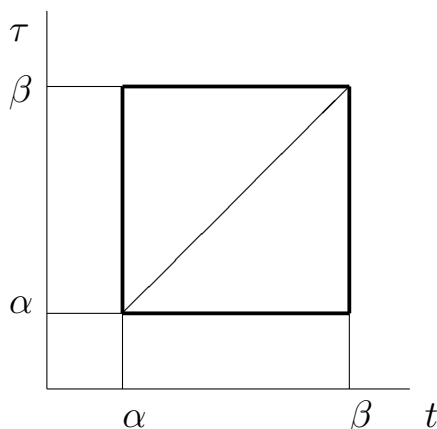


Рис.3.2

Замечание. Уравнением Фредгольма *первого* рода называется уравнение

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(t, \tau)x(\tau) d\tau + f(t) = 0.$$

Этот тип уравнений мы в нашем пособии не рассматриваем.

Уравнение (3.2.1) можно записать в виде

$$x = \mathcal{A}x + f, \tag{3.2.2}$$

где  $\mathcal{A}$  – *линейный* оператор, преобразующий непрерывную функцию  $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$$(\mathcal{A}x)(t) = \int_{\alpha}^{\beta} K(t, \tau)x(\tau) d\tau.$$

Уравнение (3.2.2) внешне схоже с одной из форм записи системы линейных алгебраических уравнений. Эта аналогия на самом деле является весьма глубокой. *Можно показать, что справедлива аналогичная известной теореме линейной алгебры*

Теорема Фредгольма. Если однородное уравнение Фредгольма имеет *только* нулевое решение:

$$f(t) \equiv 0 \implies x(t) \equiv 0,$$

то соответствующее неоднородное уравнение имеет *единственное* решение при *любом* свободном члене. Если же однородное уравнение имеет *ненулевое* решение, то соответствующее неоднородное уравнение либо неразрешимо, либо имеет бесконечное множество решений.

Пример. Если  $\int_{\alpha}^{\beta} |K(t, \tau)| d\tau \leq q < 1$  при всех  $t \in [\alpha, \beta]$ , то однородное уравнение имеет только нулевое решение и, следовательно, неоднородное уравнение имеет единственное решение при любом свободном члене.

Для доказательства выпишем очевидную оценку:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}x)(t)| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} K(t, \tau)x(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \max_{\tau \in [\alpha, \beta]} (|x(\tau)|) \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |K(t, \tau)| d\tau \leq q \cdot \max_{\tau \in [\alpha, \beta]} (|x(\tau)|). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\max_{t \in [\alpha, \beta]} (|(\mathcal{A}x)(t)|) \leq q \cdot \max_{t \in [\alpha, \beta]} (|x(t)|). \quad (3.2.3)$$

Если  $z$  – решение однородного уравнения, то

$$z = \mathcal{A}z \implies \max_{t \in [\alpha, \beta]} (|z(t)|) \leq q \cdot \max_{t \in [\alpha, \beta]} (|z(t)|) \implies z(t) \equiv 0.$$

Замечания. 1. Если в линейном пространстве функций, непрерывных на  $[\alpha, \beta]$ , ввести норму  $\|x\|_C = \max_{t \in [\alpha, \beta]} (|x(t)|)$ , то оценка (3.2.3) показывает, что для любой функции  $x$  из этого пространства справедливо неравенство  $\|\mathcal{A}x\|_C \leq q \cdot \|x\|_C$ . Отсюда видно, что наше утверждение – аналог теоремы о методе простой итерации для системы линейных алгебраических уравнений.

2. Решение уравнения Фредгольма очень редко удается получить в явной ("замкнутой") форме. Один простой случай рассматривается в следующем пункте.

### 3.3. Решение уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

Ядро уравнения Фредгольма называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(t, \tau) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \psi_k(\tau),$$

где  $\varphi_k, \psi_k; k = 1, \dots, m$  – заданные *вещественные* функции, непрерывные на  $[\alpha, \beta]$ .

Терминологическое замечание. Не следует путать вырожденность ядра уравнения Фредгольма с известным понятием вырожденности квадратной матрицы.

В случае вырожденного ядра уравнение (3.2.1) можно переписать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) \psi_k(\tau) d\tau + f(t)$$

или в виде

$$x = \sum_{k=1}^m \varphi_k \cdot \langle x, \psi_k \rangle + f, \quad (3.3.1)$$

где  $\langle x, \psi_k \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) \psi_k(\tau) d\tau$  – скалярное произведение функций.

Умножив обе части (3.3.1) скалярно на  $\psi_i$ , получим

$$\langle x, \psi_i \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \varphi_k, \psi_i \rangle \langle x, \psi_k \rangle + \langle f, \psi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m$$

или

$$c_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} c_k + b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.3.2)$$

где  $a_{ik} = \langle \varphi_k, \psi_i \rangle, b_i = \langle f, \psi_i \rangle, c_i = \langle x, \psi_i \rangle$ .

Итак, если  $x$  – решение уравнения (3.3.1), то вектор  $c$  является решением системы (3.3.1). Обратно, если  $c$  – решение системы (3.3.2), то функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(t) + f(t) \quad (3.3.3)$$

будет решением уравнения (3.3.1) (проверьте это!).

Перепишем (3.3.2) в виде  $c = Ac + b$  или  $(I_m - A)c = b$ . Если однородное уравнение Фредгольма имеет только нулевое решение, то и однородная система  $(I_m - A)c = \theta$  также имеет только нулевое решение, т.е. матрица  $I_m - A$  невырожденная. Поэтому система (3.3.2) однозначно разрешима при любом свободном члене, и можно построить решение интегрального уравнения по формуле (3.3.3).

Пример. Решим уравнение

$$x(t) = \int_0^1 \left( \exp(-t)\exp(\tau) + \exp(-2t)\exp(2\tau) \right) x(\tau) d\tau + 1.$$

Здесь  $\varphi_k(t) = \exp(-kt)$ ,  $\psi_k(t) = \exp(kt)$ ;  $k = 1, 2$ . Вычислив интегралы (скалярные произведения), запишем систему уравнений (3.3.2):

$$\begin{cases} 0 \cdot c_1 + (1/e - 1) \cdot c_2 = e - 1 \\ (1 - e) \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = \frac{e^2 - 1}{2} \end{cases}.$$

Отсюда  $c_1 = -\frac{e+1}{2}$ ,  $c_2 = -e$ , т.е.

$$x(t) = 1 - \frac{e+1}{2}\exp(-t) - e \cdot \exp(-2t).$$

### 3.4. Интегральное уравнение Вольтерра

Если  $K(t, \tau) = 0$  при  $\tau > t$ , то уравнение (3.2.1) принимает вид

$$x(t) = \int_{\alpha}^t K(t, \tau)x(\tau) d\tau + f(t). \quad (3.4.1)$$

Это уравнение называют уравнением Вольтерра<sup>19</sup>.

Замечание. Задачу Коши для линейного дифференциального уравнения

$$x' = a(t) \cdot x + g(t), \quad x(t_0) = x_0$$

можно свести к уравнению Вольтерра. Действительно, проинтегрировав тождество  $x'(\tau) \equiv a(\tau)x(\tau) + g(\tau)$  по промежутку  $[t_0, t]$ , получим

---

<sup>19</sup>Вито ВОЛЬТЕРРА (V. Volterra, 1860-1940) – итальянский математик, член национальной академии деи Линчей в Риме. Наиболее известны его работы в области дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа, теории упругости.

$$x(t) = \int_{t_0}^t a(\tau)x(\tau) d\tau + \left( x_0 + \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right),$$

которое, очевидно, является частным случаем уравнения (3.4.1).

Покажем, что однородное уравнение Вольтерра

$$z(t) = \int_{\alpha}^t K(t, \tau)z(\tau) d\tau \quad (3.4.2)$$

имеет только нулевое решение. Обозначим  $M = \max_{\alpha \leq \tau \leq t \leq \beta} (|K(t, \tau)|)$  и оценим функцию  $z$  – решение этого уравнения.

Из (3.4.2) выводим

$$|z(t)| \leq \int_{\alpha}^t |K(t, \tau)| \cdot |z(\tau)| d\tau \leq \int_{\alpha}^t M \cdot \|z\|_C d\tau = M \cdot \|z\|_C \cdot (t - \alpha).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \int_{\alpha}^t |K(t, \tau)| \cdot |z(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^t M \cdot M \cdot \|z\|_C \cdot (\tau - \alpha) d\tau = M^2 \cdot \|z\|_C \cdot \frac{(t - \alpha)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Далее точно так же получаем, что для любого натурального  $k$

$$|z(t)| \leq M^k \cdot \|z\|_C \cdot \frac{(t - \alpha)^k}{k!}.$$

При достаточно большом  $k$  имеем  $M^k \cdot \frac{(\beta - \alpha)^k}{k!} < \frac{1}{2}$ . Поэтому  $|z(t)| \leq \frac{1}{2} \cdot \|z\|_C$  при всех  $t \in [\alpha, \beta]$ , откуда  $\|z\|_C \leq \frac{1}{2} \cdot \|z\|_C$ , т.е.  $z(t) \equiv 0$ .

По теореме Фредгольма отсюда следует, что уравнение Вольтерра всегда имеет единственное решение.

Решение уравнения Вольтерра также очень редко удается получить в явной ("замкнутой") форме. В следующем пункте рассматривается важный частный случай – уравнение Вольтерра с разностным ядром, для решения которого можно применить преобразование Лапласа.

### 3.5. Уравнение Вольтерра с разностным ядром

*Разностным* называют ядро вида  $K(t, \tau) = g(t - \tau)$ . Не умаляя общности, можно считать  $\alpha = 0$ . Тогда уравнение Вольтерра примет вид

$$x(t) = \int_0^t g(t - \tau)x(\tau) d\tau + f(t), \quad 0 \leq t \leq \beta. \quad (3.5.1)$$

Если доопределить функции  $g$  и  $f$ , положив их равными нулю при  $t < 0$  и при  $t > \beta$ , то они, очевидно, окажутся оригиналами. Будем искать решение также среди функций-оригиналов. Тогда уравнение (3.5.1) переписется в виде

$$x = g \otimes x + f \quad (\otimes - \text{знак свертки функций}).$$

Преобразуя это уравнение по Лапласу, получим  $\tilde{x} = \tilde{g} \cdot \tilde{x} + \tilde{f}$ , откуда

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{f}}{1 - \tilde{g}}. \quad (3.5.2)$$

Замечания. 1. Этот метод применим и в случае, когда  $\beta = +\infty$ , если, конечно, функции  $g$  и  $f$  экспоненциально ограничены.

2. Не следует забывать, что на самом деле мы не решили уравнение, а просто "передали работу в другой цех": требуется найти изображения функций  $g$  и  $f$  и, если это удастся сделать, восстановить оригинал для найденного изображения решения (3.5.2)!

Пример. Решим уравнение

$$x(t) = \int_0^t \exp(-(t - \tau))x(\tau) d\tau + 1; \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Здесь

$$g(t) = \exp(-t) \cdot \delta_1(t) \implies \tilde{g}(s) = \frac{1}{s + 1};$$

$$f(t) = \delta_1(t) \implies \tilde{f}(s) = \frac{1}{s}.$$

Преобразуя уравнение по Лапласу, найдем

$$\tilde{x}(s) = \frac{s + 1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \implies x(t) = (1 + t) \cdot \delta_1(t).$$

### 3.6. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра

Ранее подчеркивалось, что решение интегрального уравнения очень редко удается получить в явной ("замкнутой") форме. В этом пункте мы рассмотрим простейший численный метод решения.

Зададим натуральное число  $N$  и построим на сегменте  $[\alpha, \beta]$  равномерную сетку  $t_k = \alpha + k \cdot h$ ;  $k = 0, \dots, N$ ;  $h = \frac{\beta - \alpha}{N}$ . Численное решение будем искать в виде сплайна первого порядка (кусочно постоянной функции)

$$S_h(t) = s_k \quad \text{при} \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (3.6.1)$$

Заменяя в уравнении (3.2.1) интеграл квадратурной формулой левых прямоугольников, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$s_k = h \sum_{m=0}^{N-1} K(t_k, t_m) s_m + f(t_k); \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (3.6.2)$$

Приведем без доказательства теорему, обосновывающую применение этого численного метода.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1. ядро уравнения (3.2.1) имеет непрерывные частные производные по обоим аргументам в каждом из треугольников, отмеченных на рис.3.2;
2. функция  $f$  имеет кусочно непрерывную производную на  $[\alpha, \beta]$ ;
3. соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение.

Тогда существует такое положительное число  $h_0$ , что при всех  $h < h_0$  система линейных уравнений (3.6.2) имеет единственное решение  $s = [s_0, \dots, s_{N-1}]^T$ .

Далее, существует такое положительное число  $C$ , что при  $h < h_0$

$$|x(t_k) - s_k| \leq C \cdot h, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

где  $x$  – решение уравнения (3.2.1).

Более того, для всех  $t \in [\alpha, \beta]$  выполнена оценка  $|x(t) - S_h(t)| \leq C \cdot h$ , где  $S_h$  – сплайн, определяемый формулой (3.6.1).

## Глава 4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Множество всех решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка представляет собой *однопараметрическое* семейство функций. Для фиксации конкретного решения из этого семейства задают значение этого решения в некоторой точке (начальное условие). При этом получается рассмотренная ранее задача Коши.

Множество всех решений системы из двух линейных уравнений первого порядка представляет собой *двухпараметрическое* семейство вектор-функций, и фиксировать конкретное решение можно двумя способами: либо задать *оба* дополнительных условия в *одной* точке, получив уже известную задачу Коши, либо задать их в *двух* разных точках. В последнем случае задача называется *краевой* или *граничной*.

Аналогично, для линейного уравнения второго порядка можно поставить задачу Коши, задав начальные условия (значения решения и его первой производной) в одной точке, или поставить краевую задачу, задав дополнительные условия в двух точках.

Мы намерены ограничиться в этой главе лишь постановкой простейших краевых задач и рассмотрением алгоритмов их решения без технологических подробностей.

### 4.1. Одна содержательная задача

Рассмотрим задачу о *стационарном* тепловом режиме в *тонком* проводнике длиной  $\ell$ , нагреваемом проходящим по нему током. Будем называть проводник тонким, если можно считать, что во всех точках его поперечного сечения температура одинакова. Боковая поверхность проводника покрыта идеальной теплоизоляцией. На концах искусственно поддерживается заданная температура (рис.4.1).



Рис.4.1. Тонкий проводник, нагреваемый током

Будем считать, что проводник состоит из элементов одинаковой длины (рис.4.2), и температура постоянна в пределах каждого из элементов.



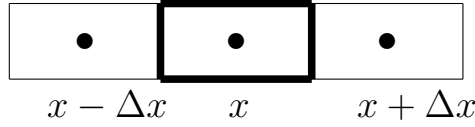


Рис.4.2. К выводу уравнения теплового баланса

Найдем приращение количества тепла  $\Delta Q$  в элементе проводника длиной  $\Delta x$  с центром в точке  $x$  за время  $\Delta t$ .

Поскольку боковая поверхность проводника теплоизолирована,  $\Delta Q$  есть сумма трех слагаемых:

1. Тепло, выделенное током. Если ток постоянный, это тепло пропорционально времени и объему куска проводника:

$$\Delta Q_1 = \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot S.$$

Здесь  $S$  – площадь сечения проводника,  $\gamma$  – константа.

2. Тепло, поступившее из *правого* соседнего элемента. Оно пропорционально времени, площади сечения проводника, разности температур в точках  $x + \Delta x$  и  $x$  и обратно пропорционально расстоянию между этими точками:

$$\Delta Q_2 = \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x}. \quad (4.1.1)$$

Здесь  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала проводника.

3. Тепло, поступившее из *левого* соседнего элемента:

$$\Delta Q_3 = \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(x - \Delta x) - T(x)}{\Delta x}.$$

В стационарном режиме количество тепла в элементе не меняется:

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = 0, \quad (4.1.2)$$

или

$$\lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} - \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(x) - T(x - \Delta x)}{\Delta x} + \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot S = 0.$$

Разделив обе части уравнения на  $\Delta t \cdot \Delta x \cdot S$ , получим

$$\lambda \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} - \lambda \frac{T(x) - T(x - \Delta x)}{\Delta x} + \gamma = 0.$$

Перейдя к пределу ( $\Delta x = 0$ ), получим континуальную модель задачи – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя крайними (граничными) условиями:

$$-(\lambda \cdot T')' = \gamma; \quad T(0) = T_0, \quad T(\ell) = T_\ell.$$

Замечание. Мы сознательно не вынесли за знак производной коэффициент теплопроводности, так как, вообще говоря, он может зависеть от  $x$ . Как видно из (4.1.1), функция  $\lambda \cdot T'$  имеет физический смысл теплового потока через единицу площади данного сечения проводника в направлении "налево".

## 4.2. Основные определения

Краевая задача для *линейного* дифференциального уравнения *второго* порядка, частным случаем которой является задача из п.4.1, формулируется так:

Найти дважды непрерывно дифференцируемую на сегменте  $[\alpha, \beta]$  функцию  $y$ , которая удовлетворяет уравнению

$$-(p \cdot y')' + q \cdot y = f, \quad (4.2.1)$$

а на концах сегмента – краевым условиям.

В уравнении (4.2.1)  $p$  – положительная, непрерывно дифференцируемая на  $[\alpha, \beta]$  функция;  $q, f$  – вещественные, непрерывные на  $[\alpha, \beta]$  функции (в задаче из п.4.1  $p = \lambda > 0, q = 0, f = \gamma$ ).

Функция  $f$  называется свободным членом краевой задачи. Если  $f = 0$ , то краевая задача называется *однородной*.

Замечание. К виду (4.2.1) можно привести любое линейное уравнение второго порядка

$$y'' = r \cdot y' + s \cdot y + g, \quad (4.2.2)$$

где  $r, s, g$  – непрерывные на  $[\alpha, \beta]$  функции.

Действительно, преобразуем уравнение (4.2.1):

$$y'' = -\frac{p'}{p} \cdot y' + \frac{q}{p} \cdot y - \frac{f}{p}.$$

и сравним его с (4.2.2). Видно, что функция  $p$  есть одно из решений уравнения  $-\frac{p'}{p} = r$ . Например, можно положить  $p(x) = \exp\left(-\int_{\alpha}^x r\right)$ .

Далее,  $q = s \cdot p$  и, наконец,  $f = -g \cdot p$ .

Чаще всего на концах сегмента рассматривают краевые условия одного из трех типов:

1.  $y(\alpha) = 0$  (краевое условие *первого* рода; в задаче о тепловом режиме это условие означает, что в точке  $\alpha$  искусственно поддерживается нулевая температура);

2.  $y'(\alpha) = 0$  (краевое условие *второго* рода; в задаче о тепловом режиме оно означает, что левый конец проводника теплоизолирован);

3.  $y'(\alpha) - \mu_\alpha \cdot y(\alpha) = 0$ ,  $\mu_\alpha > 0$  (краевое условие *третьего* рода; в задаче о тепловом режиме это условие означает, что на левом конце проводника *выходящий* тепловой поток пропорционален температуре).

Аналогично задается краевое условие в точке  $\beta$ . Но в условии третьего рода также рассматривается *выходящий* поток тепла, поэтому знак при коэффициенте  $\mu$  меняется:  $y'(\beta) + \mu_\beta \cdot y(\beta) = 0$ ,  $\mu_\beta > 0$ .

Замечание. Если краевые условия *не однородные* (в правой части стоит не нуль), то подстановка  $y = Y + P_2$ , где  $P_2$  – полином второй степени с неопределенными коэффициентами, дает возможность получить за счет выбора этих коэффициентов *однородные* краевые условия (проверьте это!). Поэтому мы будем рассматривать только задачу с однородными краевыми условиями.

Серьезное предупреждение. В отличие от задачи Коши, краевая задача может не иметь решения или иметь бесконечно много решений даже в простейших случаях.

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$-y'' = f, \quad y'(-1) = y'(1) = 0.$$

Если  $f(x) \equiv 1$ , то  $y'(x) = -x + c$ ,  $c = \text{const}$ . Из первого краевого условия получаем  $c = -1$ , а из второго  $c = 1$ , что невозможно. С физической точки зрения этот результат очевиден: если в задаче из п.4.1 проводник теплоизолирован, то стационарное распределение температуры невозможно – под действием тока он будет нагреваться неограниченно!

С другой стороны, если  $f(x) = x$ , то  $y'(x) = -x^2/2 + c$ . Из граничных условий получаем  $c = 1/2$ . Поэтому  $y(x) = -x^3/6 + x/2 + c_1$  ( $c_1$  – произвольная константа), т.е. задача имеет бесконечно много решений.

Обозначим  $\mathcal{D}_L$  линейное пространство функций, дважды непрерывно дифференцируемых на  $[\alpha, \beta]$  и *удовлетворяющих поставленным краевым условиям*. Зададим на  $\mathcal{D}_L$  линейный (проверьте это!) оператор

$$L\phi \equiv -(p \cdot \phi')' + q \cdot \phi. \quad (4.2.3)$$

Тогда исходная краевая задача запишется в виде

$$Ly = f; \quad y \in \mathcal{D}_L. \quad (4.2.4)$$

Замечание. Напомним, что в определение оператора входит не только "формула по которой он действует, но и его *область определения*  $\mathcal{D}_L$ . Поэтому операторы с одним и тем же "дифференциальным выражением" (4.2.3) и с разными граничными условиями – разные операторы!

*Можно показать, что* задача (4.2.4) "устроена" так же, как уравнение Фредгольма второго рода. Именно, справедлива теорема, в точности повторяющая теорему Фредгольма.

Теорема. Если *однородная* краевая задача для уравнения (4.2.1) имеет *только* нулевое решение ( $y(x) \equiv 0$ ), то соответствующая *неоднородная* задача имеет *единственное* решение при *любом* свободном члене. Если же однородная задача имеет *ненулевое* решение, то соответствующая *неоднородная* задача либо неразрешима, либо имеет бесконечное множество решений.

Замечания. 1. В приведенном выше примере однородная задача  $-y'' = 0$ ,  $y'(-1) = y'(1) = 0$ , очевидно, имеет решение  $y(x) = const$ .

2. Так же, как в задаче Коши, можно рассматривать уравнения вида (4.2.1) с *кусочно непрерывными* коэффициентами и правой частью. Такие уравнения естественно возникают в различных приложениях. Например, если в задаче из п.4.1 проводник составлен из нескольких материалов с разными теплопроводностями, то коэффициент  $\lambda$  будет кусочно непрерывным. Поскольку  $\lambda \cdot T'$  должна быть первообразной от  $(-\gamma)$ , т.е. непрерывной функцией, решение  $T$  должно иметь кусочно непрерывную производную, разрывы которой согласованы с разрывами  $\lambda$ . Аналогично понимается решение и в общем случае. Сформулированная теорема при этом остается верной.

### 4.3. Задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу

$$L\varphi = \nu \cdot \varphi; \quad \varphi \in \mathcal{D}_L, \quad (4.3.1)$$

где  $\nu$  – комплексное число.

Очевидно, что эта задача всегда имеет решение  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Определение. Если задача (4.3.1) имеет *ненулевое* решение  $\varphi \in \mathcal{D}_L$ , то число  $\nu$  называется *собственным числом*, а функция  $\varphi$  – соответствующей (этому числу) *собственной функцией* ("собственным вектором") оператора  $L$ .

Задача об отыскании собственных функций оператора  $L$  называется задачей Штурма–Лиувилля<sup>20</sup>.

Покажем, что для любых функций  $y, z \in \mathcal{D}_L$  справедливо равенство

$$\langle Ly, z \rangle = \langle y, Lz \rangle, \quad (4.3.2)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – обычное скалярное произведение на  $[\alpha, \beta]$ , определенное равенством (2.2.1).

Для определенности предположим, что на обоих концах сегмента  $[\alpha, \beta]$  задано краевое условие первого рода. Распишем скалярное произведение в левой части (4.3.2):

$$\langle Ly, z \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} Ly \cdot \bar{z} = \int_{\alpha}^{\beta} (-(p \cdot y')' + q \cdot y) \cdot \bar{z}.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получим

$$\begin{aligned} \langle Ly, z \rangle = & -p(\beta) \cdot y'(\beta) \cdot \bar{z}(\beta) + p(\alpha) \cdot y'(\alpha) \cdot \bar{z}(\alpha) + \\ & + \int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot y' \cdot \bar{z}' + q \cdot y \cdot \bar{z}). \end{aligned}$$

Поскольку  $z$  удовлетворяет граничным условиям, внеинтегральные члены обращаются в нуль. Окончательно имеем

$$\langle Ly, z \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot y' \cdot \bar{z}' + q \cdot y \cdot \bar{z}). \quad (4.3.3)$$

Проделав такие же преобразования с правой частью (4.3.2) и воспользовавшись тем, что  $y$  также удовлетворяет граничным условиям, мы вновь приходим к (4.3.3).

Убедитесь в том, что равенство (4.3.2) верно и для краевых условий второго и третьего рода.

<sup>20</sup>Жак Шарль Франсуа ШТУРМ (J.C.F. Sturm, 1803-1855) – французский математик, член Парижской АН, иностранный почетный член Петербургской АН. Его основные работы посвящены краевым задачам математической физики.

Жозеф ЛИУВИЛЛЬ (J. Liouville, 1809-1882) – французский математик, член Парижской АН, иностранный почетный член Петербургской АН. Работы по общей теории аналитических функций, теории чисел, статистической механике. Построил теорию эллиптических функций.

Свойство (4.3.2) оператора  $L$  аналогично самосопряженности квадратной матрицы. Как известно из курса линейной алгебры, всякая эрмитова матрица имеет ортогональный собственный базис, а все ее собственные числа вещественны. *Можно показать, что для задачи (4.3.1) справедлива*

Теорема. 1. Все собственные числа оператора  $L$  вещественны. Они образуют неограниченно возрастающую последовательность  $(\nu_k)_{k=1}^{+\infty}$ . Каждому собственному числу соответствует ровно одна (с точностью до числового множителя) собственная функция  $\varphi_k$ . Более того, все собственные функции могут быть выбраны вещественными.

2. Собственные функции оператора  $L$  попарно ортогональны на  $[\alpha, \beta]$ , т.е. при  $k \neq m$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_k \cdot \bar{\varphi}_m = 0.$$

3. Последовательность  $(\varphi_k)_{k=1}^{+\infty}$  образует базис в пространстве кусочно непрерывных на  $[\alpha, \beta]$  функций со скалярным произведением (2.2.1).

Замечание. Вместо (4.3.1) можно рассмотреть более общую задачу

$$L\varphi = \nu \cdot r \cdot \varphi; \quad \varphi \in \mathcal{D}_L, \quad (4.3.4)$$

где  $r$  – положительная, непрерывная на  $[\alpha, \beta]$  функция, именуемая *весом*. Ненулевые решения задачи (4.3.4) называются собственными функциями оператора  $L$  с весом  $r$ .

Для задачи (4.3.4) остается справедливым первое утверждение теоремы. Во втором и третьем утверждениях следует заменить обычное скалярное произведение (2.2.1) на скалярное произведение с весом (2.2.3).

Теорема. Если  $q(x) \geq 0$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$  (в случае, если на обоих концах сегмента  $[\alpha, \beta]$  заданы краевые условия второго рода, следует дополнительно потребовать, чтобы функция  $q$  не была нулевой), то все собственные числа оператора  $L$  положительны.

Доказательство. Предположим для определенности, что на обоих концах сегмента заданы условия первого рода. Умножив уравнение (4.3.1) скалярно на  $\varphi$ , получим

$$\langle L\varphi, \varphi \rangle = \nu \cdot \|\varphi\|^2.$$

Преобразуем левую часть с учетом (4.3.3):

$$\int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot |\varphi'|^2 + q \cdot |\varphi|^2) = \nu \cdot \|\varphi\|^2.$$

Поскольку  $p(x) > 0$  и  $q(x) \geq 0$ , оба слагаемых под интегралом неотрицательны. Более того, если  $p(x) \cdot |\varphi'(x)|^2 \equiv 0$ , то  $\varphi'(x) \equiv 0$ , откуда в силу граничных условий ( $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$ ) получаем  $\varphi(x) \equiv 0$ , что невозможно. Поэтому весь интеграл положителен, и  $\nu > 0$ . ■

Попробуйте доказать теорему для других краевых условий.

Замечания. 1. В условиях последней теоремы однородная задача (4.2.4) имеет только нулевое решение. Согласно теореме из п.4.2, это означает, что краевая задача (4.2.4) однозначно разрешима при любом свободном члене.

2. Теорема без изменений доказывается для задачи с весом (4.3.4).

## 4.4. Проекционные методы решения краевой задачи. I. Метод Фурье

Будем искать решение краевой задачи в форме ряда Фурье по базису, состоящему из *вещественных* собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (4.3.1):

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{y}_k \cdot \varphi_k. \quad (4.4.1)$$

Подставив (4.4.1) в (4.2.4), получим *тождество*

$$L\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \hat{y}_k \cdot \varphi_k\right) = f.$$

Умножая это тождество скалярно на *все* базисные функции  $\varphi_m$ , получим *бесконечную* систему уравнений

$$\left\langle L\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \hat{y}_k \cdot \varphi_k\right), \varphi_m \right\rangle = \langle f, \varphi_m \rangle, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Применим тождество (4.3.2) и учтем, что  $L\varphi_m = \nu_m \cdot \varphi_m$ . Получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \langle \hat{y}_k \cdot \varphi_k, \nu_m \cdot \varphi_m \rangle = \langle f, \varphi_m \rangle.$$

В силу попарной ортогональности собственных функций в левой части остается только одно слагаемое – бесконечная система уравнений оказывается *диагональной*:

$$\nu_m \widehat{y}_m \cdot \|\varphi_m\|^2 = \langle f, \varphi_m \rangle, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Если предположить, что все  $\nu_k$  отличны от нуля (вспомните теорему из п.4.2!), то решение краевой задачи имеет вид

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\widehat{f}_k}{\nu_k} \cdot \varphi_k, \quad (4.4.2)$$

где

$$\widehat{f}_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \left( \int_{\alpha}^{\beta} f \cdot \varphi_k \right) / \left( \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi_k|^2 \right). \quad (4.4.3)$$

Замечание. Аналогично доказывается, что если известны собственные функции оператора  $L$  с весом  $r$ , то коэффициенты  $\widehat{f}_k$  в (4.4.2) вычисляются по формуле

$$\widehat{f}_k = \left( \int_{\alpha}^{\beta} f \cdot \varphi_k \right) / \left( \int_{\alpha}^{\beta} r \cdot |\varphi_k|^2 \right).$$

Примеры. 1.  $y'' + y = -\exp(2x)$ ,  $y(1) = y(2) = 0$ .

Приведем уравнение к виду (4.2.1):

$$-y'' - y = \exp(2x).$$

Здесь  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $p(x) \equiv 1$ ,  $q(x) \equiv -1$ ,  $f(x) = \exp(2x)$ .

Задача Штурма–Лиувилля, определяющая собственные числа и собственные функции оператора, имеет вид

$$-\varphi'' - \varphi = \nu \cdot \varphi, \quad \varphi(1) = \varphi(2) = 0.$$

Перепишем дифференциальное уравнение для собственной функции так:

$$-\varphi'' = \mu \cdot \varphi, \quad \mu = \nu + 1.$$

Из теоремы, доказанной в конце предыдущего пункта, следует, что  $\mu > 0$ . Убедитесь (например, с помощью преобразования Лапласа), что двумерное пространство всех решений этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = A \cos(\gamma x) + B \frac{\sin(\gamma x)}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{\mu}.$$



Подставляя это двухпараметрическое семейство в краевые условия, получим однородную систему уравнений для определения  $A$  и  $B$ :

$$\begin{cases} \cos(\gamma) \cdot A + \frac{\sin(\gamma)}{\gamma} \cdot B = 0 \\ \cos(2\gamma) \cdot A + \frac{\sin(2\gamma)}{\gamma} \cdot B = 0. \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Ненулевое решение эта система имеет, если ее определитель равен нулю. Следовательно,  $\gamma$  должно быть корнем уравнения  $\frac{\sin(\gamma)}{\gamma} = 0$ , т.е.

$$\gamma_k = k\pi \quad (\nu_k = k^2\pi^2 - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Подставив найденные  $\gamma_k$  в (4.4.4), выберем какое-нибудь ненулевое решение этой системы, например,

$$A_k = -\sin(\gamma_k) = 0, \quad B_k = \gamma_k \cos(\gamma_k) = (-1)^k \cdot k\pi.$$

Тогда

$$\varphi_k(x) = \sin(k\pi(x-1)); \quad \|\varphi_k\|^2 = \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \int_1^2 \sin^2(k\pi(x-1)) dx = \frac{1}{2}.$$

Вычислив коэффициенты в (4.4.3):

$$\hat{f}_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = 2 \cdot \int_1^2 \exp(2x) \cdot \sin(k\pi(x-1)) dx = 2 \frac{(-1)^k e^2 (e^2 - 1)}{k^2 \pi^2 + 4},$$

найдем решение краевой задачи по формуле (4.4.2):

$$y(x) = 2e^2(e^2 - 1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k^2\pi^2 - 1)(k^2\pi^2 + 4)} \cdot \sin(k\pi(x-1)).$$

График решения представлен на рис.4.3.

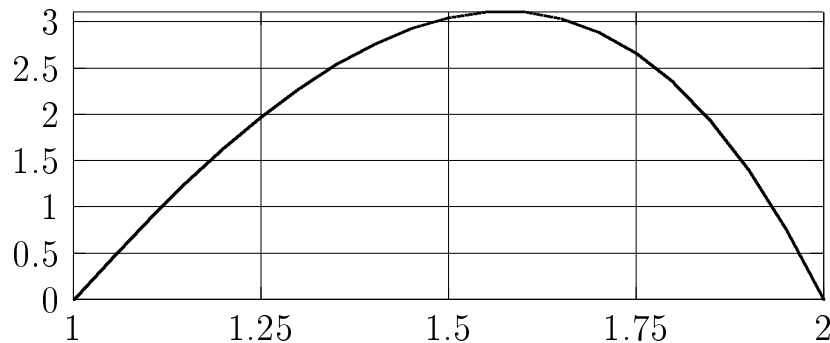


Рис.4.3

$$2. \ y'' + \frac{1}{x} \cdot y' + y = 1, \quad y(1) = y(2) = 0.$$

Приведем уравнение к виду (4.2.1):

$$-(x \cdot y')' - x \cdot y = -x.$$

Здесь  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $p(x) = x$ ,  $q(x) = -x$ ,  $f(x) = -x$ .

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля о собственных функциях оператора  $Ly \equiv -(x \cdot y')' - x \cdot y$  с весом  $x$ :

$$-(x \cdot \varphi')' - x \cdot \varphi = \nu \cdot x \cdot \varphi, \quad \varphi(1) = \varphi(2) = 0.$$

Перепишем дифференциальное уравнение для собственной функции так:

$$-(x \cdot \varphi')' = (\nu + 1) \cdot x \cdot \varphi.$$

Известно (См., например, Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979), что двумерное пространство всех решений этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = AJ_0(\gamma x) + BY_0(\gamma x), \quad \gamma = \sqrt{\nu + 1},$$

где  $J_0$ ,  $Y_0$  – функции Бесселя (цилиндрические функции) нулевого порядка, первого и второго рода соответственно.

Краевые условия позволяют найти собственные числа оператора: *однородная* система линейных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(1) = J_0(\gamma) \cdot A + Y_0(\gamma) \cdot B = 0 \\ \varphi(2) = J_0(2\gamma) \cdot A + Y_0(2\gamma) \cdot B = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение только при равенстве нулю определителя ее матрицы. Следовательно, собственные числа являются решениями трансцендентного уравнения  $J_0(\gamma) \cdot Y_0(2\gamma) - J_0(2\gamma) \cdot Y_0(\gamma) = 0$ . На рис.4.4 представлен фрагмент графика левой части этого уравнения, а в таблице – значения первых шести его корней.

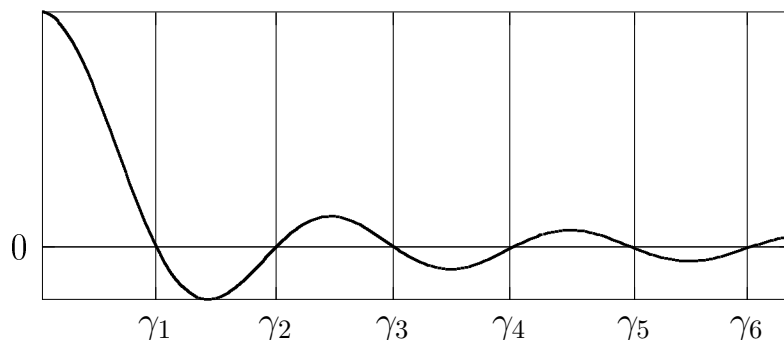


Рис.4.4

$k$	$\gamma_k$
1	3.123030920E+00
2	6.273435714E+00
3	9.418207542E+00
4	1.256142319E+01
5	1.570399789E+01
6	1.884624804E+01

Отметим, что алгоритм решения уравнений такого типа реализован в виде Фортран-программы, возвращающей заданное количество корней.

В качестве коэффициентов  $A_k$  и  $B_k$  можно взять, например, числа  $A_k = Y_0(\gamma_k)$ ,  $B_k = -J_0(\gamma_k)$ . Итак,

$$\varphi_k(x) = Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x).$$

Вычисление коэффициентов Фурье

$$\hat{f}_k = \frac{\int_1^2 (Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x)) \cdot (-x) dx}{\int_1^2 (Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x))^2 \cdot x dx}$$

сводится к вычислению двух интегралов. Приведем результаты, полученные с помощью среды конечного пользователя MAPLE: интеграл в знаменателе равен

$$\frac{x^2}{2} \left( (Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x))^2 + (Y_0(\gamma_k) \cdot J_1(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_1(\gamma_k x))^2 \right) \Big|_1^2,$$

интеграл в числителе –

$$\frac{1}{\gamma_k} (J_0(\gamma_k) \cdot Y_1(\gamma_k x) - Y_0(\gamma_k) \cdot J_1(\gamma_k x)) \Big|_1^2.$$

Здесь  $J_1$ ,  $Y_1$  – функции Бесселя (цилиндрические функции) первого порядка, первого и второго рода соответственно.

Решение краевой задачи имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\hat{f}_k}{\gamma_k^2 - 1} \cdot (Y_0(\gamma_k) \cdot J_0(\gamma_k x) - J_0(\gamma_k) \cdot Y_0(\gamma_k x)).$$

Его график представлен на рис.4.5.

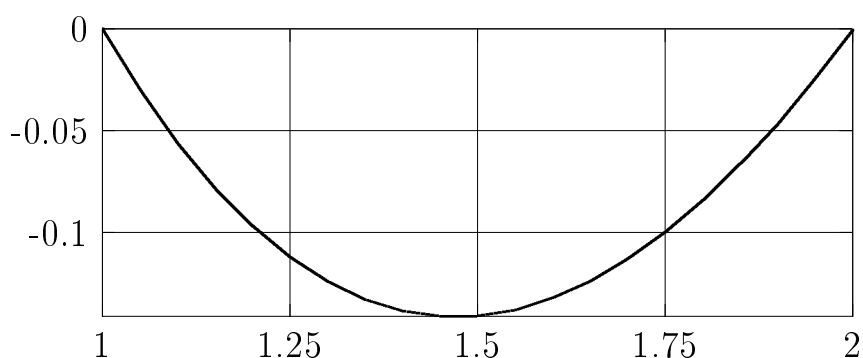


Рис.4.5

Замечание. Как часто бывает, простой на первый взгляд алгоритм приводит при попытке им воспользоваться к весьма сложной *аналитической* задаче – нужно построить базис из собственных функций линейного оператора. В первом нашем примере это было несложно сделать, так как задача свелась к решению линейного дифференциального уравнения с *постоянными* коэффициентами и к решению "школьного" трансцендентного уравнения  $\frac{\sin(\gamma)}{\gamma} = 0$ .

Однако уже во втором примере пришлось обратиться к справочнику, к среде конечного пользователя и к Фортран-программе! Ведь собственные функции потому и называются *собственными*, что определяются оператором. Поэтому для каждого вновь встретившегося линейного оператора необходимо построить новую систему собственных элементов, т.е. найти решения новой задачи Штурма–Лиувилля.

Математики докомпьютерной эпохи проделали гигантскую работу: построены, изучены и *табулированы* многочисленные функции, носящие гордое название "специальных". Таковы функции Бесселя (цилиндрические), функции Лежандра (шаровые), функции Якоби (эллиптические)... См., например, "Справочник по специальным функциям".

В наше время нет необходимости обращаться к таблицам (а часто даже и к справочникам), так как библиотеки Фортрана располагают стандартными программами вычисления всех распространенных специальных функций, а такие среды конечного пользователя, как MAPLE и MATHEMATICA, не только вычисляют значения этих функций с произвольно заданным количеством значащих цифр, но и выполняют над ними аналитические операции.

Решение краевой задачи всегда стоит начать с изучения справочников, и если Ваша задача – вариант уже решенной, то успех обеспечен.

А вот если наши великие предшественники не сумели построить собственные функции интересующего нас оператора, то это и Вам вряд ли удастся. Поэтому в следующем пункте будут конспективно изложены основы современной технологии решения краевых задач.

## 4.5. Проекционные методы решения краевой задачи. II. Современные технологии

Предположим, что на обоих концах сегмента  $[\alpha, \beta]$  заданы краевые условия третьего рода. Умножив скалярно уравнение (4.2.1) на произвольную кусочно гладкую, непрерывную функцию  $\phi$ , получим равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} (-(p \cdot y')' + q \cdot y) \cdot \phi = \int_{\alpha}^{\beta} f \cdot \phi. \quad (4.5.1)$$

Преобразуем (4.5.1), применяя интегрирование по частям (с учетом граничных условий):

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (-(p \cdot y')' + q \cdot y) \cdot \phi &= -(py')\phi|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot y' \cdot \phi' + q \cdot y \cdot \phi) = \\ &= p(\alpha)\mu_{\alpha}y(\alpha)\phi(\alpha) + p(\beta)\mu_{\beta}y(\beta)\phi(\beta) + \int_{\alpha}^{\beta} (p \cdot y' \cdot \phi' + q \cdot y \cdot \phi) = \int_{\alpha}^{\beta} f \cdot \phi. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Общая идея проекционных методов заключается в том, что приближенное решение краевой задачи ищут в виде линейной комбинации некоторого конечного набора линейно независимых функций  $\{\phi_k\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , причем коэффициенты этой линейной комбинации находят из системы уравнений, которая получается подстановкой в (4.5.2)  $\phi = \phi_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

Если в качестве  $\{\phi_k\}$  взять первые  $N$  собственных функций задачи (4.3.1), то, аналогично предыдущему пункту, легко получить, что каждое из уравнений (4.5.2) будет содержать только один неизвестный коэффициент искомой линейной комбинации; полученные коэффициенты совпадают с первыми  $N$  коэффициентами Фурье функции  $y$ , т.е. приближенное решение в этом случае – просто частная сумма ряда Фурье точного решения. Однако, как уже указывалось, собственные функции известны лишь для считанного числа задач.

Поэтому заманчивой выглядит идея использовать во *всех* краевых задачах какие-нибудь несложные *стандартные* наборы. Например, взять в качестве такого набора первые  $N$  элементов последовательности тригонометрических функций

$$\phi_k(x) = A_k \cos(\gamma_k x) + B_k \frac{\sin(\gamma_k x)}{\gamma_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теоретически это возможно: за счет выбора параметра  $\gamma_k$  и коэффициентов  $A_k$  и  $B_k$  можно аналогично примеру **1** п.4.4 удовлетворить краевым условиям и затем решить систему уравнений (4.5.2). К сожалению, получающаяся система будет в общем случае иметь заполненную матрицу, т.е. каждое уравнение содержит все искомые коэффициенты.

В дальнейшем будем считать для простоты, что  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ . Зададим натуральное число  $N$  и построим на  $[0, 1]$  *равномерную* сетку

$$x_n = nh; \quad n = 0, \dots, N + 1; \quad h = \frac{1}{N + 1}. \quad (4.5.3)$$

Построим функции (их именуют "палатками см. рис.4.6)

$$\Pi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & \text{при } 0 \leq x \leq h \\ 0 & \text{при } x > h; \end{cases}$$

$$\Pi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < (n - 1) \cdot h \\ \frac{x}{h} - (n - 1) & \text{при } (n - 1) \cdot h \leq x \leq n \cdot h \\ (n + 1) - \frac{x}{h} & \text{при } n \cdot h \leq x \leq (n + 1) \cdot h \\ 0 & \text{при } x > (n + 1) \cdot h \end{cases}, \quad n = 1, \dots, N;$$

$$\Pi_{N+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < N \cdot h \\ \frac{x}{h} - N & \text{при } N \cdot h \leq x \leq (N + 1) \cdot h. \end{cases}$$

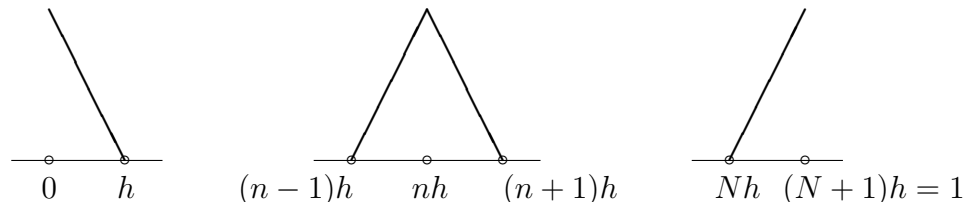


Рис.4.6. Графики функций-"палаток"

Будем искать приближенное решение нашей краевой задачи в виде линейной комбинации этих "палаток т.е. в виде непрерывного сплайна второго порядка на сетке (4.5.3):

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=0}^{N+1} c_k \cdot \Pi_k(x). \quad (4.5.4)$$

Заметим, что по определению "палаток"  $\Pi_k(x_n) = \delta_{nk}$ , и потому  $c_k = \tilde{y}(x_k)$ .

Подставляя (4.5.4) в (4.5.2) и полагая  $\phi = \Pi_n$ , получим

$$\sum_{k=0}^{N+1} a_{nk} \cdot c_k = b_n, \quad n = 0, \dots, N+1, \quad (4.5.5)$$

где

$$a_{nk} = \int_0^1 (p \cdot \Pi'_n \cdot \Pi'_k + q \cdot \Pi_n \cdot \Pi_k), \quad n, k = 1, \dots, N; \quad (4.5.6)$$

$$a_{0k} = a_{k0} = p(0)\mu_0 \cdot \delta_{0k} + \int_0^1 (p \cdot \Pi'_0 \cdot \Pi'_k + q \cdot \Pi_0 \cdot \Pi_k); \quad (4.5.7)$$

$$a_{N+1,k} = a_{k,N+1} = p(1)\mu_1 \cdot \delta_{N+1,k} + \int_0^1 (p \cdot \Pi'_{N+1} \cdot \Pi'_k + q \cdot \Pi_{N+1} \cdot \Pi_k); \quad (4.5.8)$$

$$b_n = \int_0^1 f \cdot \Pi_n, \quad n = 0, \dots, N+1. \quad (4.5.9)$$

Очевидно,  $(N+2) \times (N+2)$ -матрица  $A$  эрмитова. Далее, по построению

$$\sum_{k,n=0}^{N+1} a_{nk} c_k c_n = \langle L\tilde{y}, \tilde{y} \rangle. \quad (4.5.10)$$

Если  $q$  – неотрицательная функция, то аналогично теореме в конце п.4.3 доказывается, что правая часть (4.5.10) положительна, если только  $c \neq \theta$ . Таким образом, в этом случае  $A$  – *положительно определенная* матрица. Поэтому система (4.5.5) при каждом  $N$  имеет единственное решение.

Однако это справедливо и для других наборов  $\{\phi_k\}$ . Основное достоинство "палаток" состоит в другом: при  $|n - k| > 1$  промежутки, на которых они отличны от нуля, не пересекаются, и из (4.5.6) – (4.5.8)

очевидно, что  $a_{nk} = 0$ . Матрица  $A$  системы (4.5.5) оказывается трехдиагональной! Сочетание положительной определенности и трехдиагональности обеспечило возможность создания быстрых и эффективных стандартных программ для решения системы.

Можно показать, что справедлива

Теорема. Пусть  $p$  – кусочно гладкая, непрерывная на  $[0, 1]$  функция,  $q, f$  кусочно непрерывны на  $[0, 1]$ , причем  $q \geq 0$ . Если  $y$  – точное решение краевой задачи, а  $\tilde{y}$  – приближенное решение, задаваемое формулой (4.5.4), то для всех  $x \in [0, 1]$  выполнена оценка

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq C \cdot h, \quad (4.5.11)$$

где  $C$  – некоторая положительная константа.

В частности, при  $k = 0, 1, \dots, N + 1$   $|c_k - y(x_k)| \leq C \cdot h$ .

Замечания. 1. Один из возможных способов приближенного вычисления интегралов в формулах (4.5.6) – (4.5.9) состоит в следующем. Функции  $p, q, f$  аппроксимируются непрерывными сплайнами второго порядка на сетке (4.5.3), после чего интегралы легко выражаются через линейные комбинации значений этих функций в узлах сетки. Существенно, что коэффициенты линейных комбинаций стандартны и могут быть вычислены заранее.

2. В практических вычислениях константа  $C$  в оценке (4.5.11) обычно неизвестна. Поэтому стандартные программы численного решения краевых задач используют различные косвенные методы контроля точности. Простейший способ, как и при решении задачи Коши, состоит в последовательном дроблении шага  $h$ : вычисления проводятся до тех пор, пока относительное изменение приближенного решения не станет меньше наперед заданного  $\varepsilon$ . Повторим, что косвенные методы, удобные в силу своей простоты, не дают полной гарантии достоверности результата.

3. Обратите внимание на то, что ни одно приближенное решение не имеет вторых производных. Однако теорема показывает, что значения приближенного решения на сетке при измельчении шага сходятся к значениям точного решения на той же сетке, а больше ничего на практике и не требуется!

Таким образом, замена уравнения (4.2.1) на "интегральное тождество" (4.5.2) дает возможность использовать при построении приближенного решения недостаточно гладкие, зато простые и удобные функции  $P_k$ .



4. Если в исходной задаче на концах промежутка были заданы условия второго рода, все полученные формулы сохраняются, следует лишь положить  $\mu_0 = \mu_1 = 0$  и потребовать, чтобы функция  $q$  не была нулевой (см. теорему в конце п.4.3).

Если же на концах промежутка заданы условия первого рода, то в (4.5.1) следует брать  $\phi$  также равными нулю на концах промежутка. Таким образом, приближенное решение ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot \Pi_k(x). \quad (4.5.4')$$

Порядок системы (4.5.5) оказывается равным не  $N+2$ , а  $N$ ; коэффициенты системы задаются формулами (4.5.6). Теорема остается верной и в этом случае.

## Глава 5. МНОГОМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

### 5.1. Одна содержательная задача

Рассмотрим *стационарный* тепловой режим в *толстом* проводнике постоянного поперечного сечения, *бесконечном* вдоль оси  $Oz$ . Допустим, что тепло выделяется током равномерно по длине проводника. Тогда передачи тепла вдоль оси  $Oz$  не будет, и температура будет зависеть от *двух* пространственных координат. Выделим слой проводника толщины  $\Delta z$ , заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными оси  $Oz$ , и рассмотрим прямоугольный элемент этого слоя с центром в точке  $(x, y)$ , а также четыре "соседних" с ним элемента (рис.5.1). Будем считать, что температура постоянна в пределах каждого из элементов.

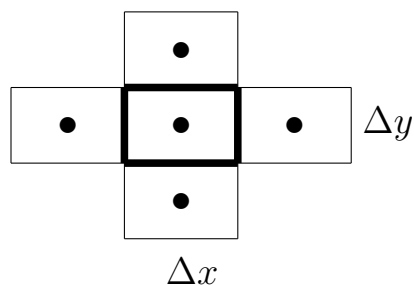


Рис.5.1. К выводу уравнения теплового баланса

Приращение количества тепла в выделенном на рис.5.1 элементе проводника за время  $\Delta t$  есть сумма *пяти* слагаемых:

1. Тепло, выделенное током, которое при постоянном токе пропорционально времени и объему элемента:

$$\Delta Q_1 = \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z.$$

2. Тепло, поступившее из *правого* соседнего элемента, которое пропорционально времени, площади границы между элементами, разности температур в центрах элементов и обратно пропорционально расстоянию между этими центрами ( $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала проводника):

$$\Delta Q_2 = \lambda \cdot \Delta t \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{T(x + \Delta x, y) - T(x, y)}{\Delta x}.$$

3. Тепло, поступившее из *левого* соседнего элемента:

$$\Delta Q_3 = \lambda \cdot \Delta t \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{T(x - \Delta x, y) - T(x, y)}{\Delta x}.$$

4. Тепло, поступившее из *верхнего* соседнего элемента:

$$\Delta Q_4 = \lambda \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \frac{T(x, y + \Delta y) - T(x, y)}{\Delta y}.$$

5. Тепло, поступившее из *нижнего* соседнего элемента:

$$\Delta Q_5 = \lambda \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \frac{T(x, y - \Delta y) - T(x, y)}{\Delta y}.$$

Запишем уравнение теплового баланса для *стационарного* режима:

$$\sum_{j=0}^5 \Delta Q_j = 0.$$

Мы не будем выписывать получающиеся громоздкие выражения. Отметим лишь, что, аналогично задаче из п.4.1, сокращая эти уравнения на  $\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$  и переходя к пределу ( $\Delta x = \Delta y = 0$ ), получим (в предположении достаточной гладкости функции  $T$ ) дифференциальное уравнение *в частных производных*

$$D_x(\lambda \cdot D_x T) + D_y(\lambda \cdot D_y T) + \gamma = 0. \quad (5.1.1)$$

Добавляя к уравнению (5.1.1) граничное условие (задавая на границе проводника либо температуру, либо тепловой поток, либо, наконец, их линейную комбинацию), получим краевую задачу для этого уравнения.

## 5.2. Основные определения

Уравнение (5.1.1) представляет собой двумерный вариант уравнения

$$Lu \equiv -\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) = f, \quad (5.2.1)$$

возникающего при описании многих физических задач (напомним, что это уравнение уже встречалось в п.1.7).

Мы будем рассматривать уравнение (5.2.1) в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с кусочно гладкой границей (в приложениях обычно  $n = 2$  или  $n = 3$ ).

В (5.2.1)  $\lambda$  – заданная функция в  $\Omega$ , непрерывно дифференцируемая вплоть до границы и удовлетворяющая неравенству

$$\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0, \quad x \in \Omega;$$

$f$  – кусочно непрерывная в  $\Omega$  функция.

Замечание. Если  $\lambda = const$ , уравнение (5.2.1) принимает вид

$$-\Delta u = f/\lambda$$

и, как уже указывалось, именуется уравнением Пуассона. Однородное уравнение Пуассона называется уравнением Лапласа.

На границе области  $\Omega$ , аналогично краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, обычно задается краевое условие одного из трех типов:

1) первого рода (условие Дирихле)

$$u|_{\partial\Omega} = \phi_1$$

(фиксируются значения искомой функции на границе области);

2) второго рода (условие Неймана<sup>21</sup>)

$$\lambda \cdot D_{\mathbf{n}}u|_{\partial\Omega} = \phi_2$$

(фиксируются значения нормальной производной искомой функции на границе области);

3) или третьего рода

$$(\lambda \cdot D_{\mathbf{n}}u + \alpha \cdot u)|_{\partial\Omega} = \phi_3$$

(физический смысл всех этих условий для задачи о тепловом режиме описан в п.4.2). Возможна также ситуация, когда на части границы  $\Omega$  задается, к примеру, условие первого рода, а на остальной части  $\partial\Omega$  – условие третьего рода, и т. п.

Замечание. Аналогично п.4.2, можно с помощью замены неизвестной функции добиться, чтобы краевые условия были *однородными*.

### 5.3. Метод Фурье решения краевой задачи

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  – область с кусочно гладкой границей  $\partial\Omega$ . Обозначим  $\mathcal{D}_L$  линейное пространство всех заданных на  $\Omega$  функций, имеющих кусочно непрерывные вторые частные производные и удовлетворяющих на  $\partial\Omega$  заданным *однородным* краевым условиям. Тогда краевая задача для уравнения (5.2.1) может быть записана в виде

$$Lu = f, \quad u \in \mathcal{D}_L. \quad (5.3.1)$$

---

<sup>21</sup>Карл Готфрид НЕЙМАН (K.G. Neumann, 1832-1925) – немецкий физик и математик.

Решение задачи (5.3.1) методом Фурье, так же, как в одномерном случае (п.4.4), возможно, если известны все собственные числа и соответствующие им собственные функции оператора  $L$  – нетривиальные решения краевой задачи

$$L\varphi = \nu \cdot \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_L. \quad (5.3.2)$$

Можно показать, что при достаточно общих условиях существуют собственные функции задачи (5.3.2), образующие ортогональный базис в пространстве кусочно непрерывных на  $\Omega$  функций со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \varphi \cdot \bar{\psi}.$$

Однако случаи, когда собственные функции можно выписать "в явном виде" очень редки. Приведем два примера. В обоих  $\lambda \equiv 1$ , т.е. уравнение для собственных функций имеет вид

$$-\Delta \varphi = \nu \cdot \varphi. \quad (5.3.3)$$

Примеры. 1.  $\Omega = ]0, a_1[ \times ]0, a_2[ \times ]0, a_3[ \subset \mathbb{R}^3$  – прямоугольный параллелепипед.

Если на  $\partial\Omega$  задано условие Дирихле, то собственные функции имеют вид

$$\varphi_{jkm} = \sin\left(\frac{j\pi x_1}{a_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_2}{a_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x_3}{a_3}\right), \quad j, k, m \in \mathbb{N}.$$

Проверьте, что  $\varphi_{jkm}$  действительно является собственной функцией задачи (5.3.2), соответствующая собственному числу

$$\nu_{jkm} = \pi^2 \cdot \left( \frac{j^2}{a_1^2} + \frac{k^2}{a_2^2} + \frac{m^2}{a_3^2} \right). \quad (5.3.4)$$

Аналогично, в случае краевого условия Неймана собственные функции имеют вид

$$\varphi_{jkm} = \cos\left(\frac{j\pi x_1}{a_1}\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi x_2}{a_2}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x_3}{a_3}\right), \quad j, k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

а собственные числа также задаются формулой (5.3.4).

2.  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$  – круг.

Можно показать, что в естественной для этой задачи полярной системе координат  $(\rho, \vartheta)$  уравнение (5.3.3) записывается так:

$$-D_\rho(\rho \cdot D_\rho \varphi) - \frac{1}{\rho} \cdot D_{\vartheta\vartheta}^2 \varphi = \nu \cdot \rho \cdot \varphi.$$

Собственные функции задачи с условием Дирихле  $\varphi|_{\rho=R} = 0$  имеют вид

$$\varphi_{km} = J_{|k|} \left( \mu_m^{(k)} \frac{\rho}{R} \right) \cdot \exp(ik\vartheta), \quad k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}.$$

Здесь  $J_{|k|}$  – функция Бесселя (цилиндрическая функция) первого рода порядка  $|k|$ ,  $\mu_m^{(k)}$  – ее  $m$ -й положительный корень<sup>22</sup>. Функция  $\varphi_{km}$  соответствует собственному числу  $\nu_{km} = (\mu_m^{(k)} / R)^2$ .

Дословным повторением выкладок п.4.4 доказывается, что если известны собственные числа и собственные функции задачи (5.3.2), то решение задачи (5.3.1) имеет вид (все формулы даны для  $n = 3$ )

$$u = \sum_{j,k,m} \frac{f_{jkm}}{\nu_{jkm}} \cdot \varphi_{jkm}, \quad (5.3.5)$$

где

$$f_{jkm} = \frac{\langle f, \varphi_{jkm} \rangle}{\|\varphi_{jkm}\|^2} = \left( \int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi}_{jkm} \right) / \left( \int_{\Omega} |\varphi_{jkm}|^2 \right).$$

Суммирование в (5.3.5) ведется по всем значениям индексов.

Аналогично одномерному случаю, частная сумма ряда (5.3.5) дает наилучшее среднеквадратическое приближение для решения задачи (5.3.1) среди всех линейных комбинаций заданного набора функций  $\varphi_{jkm}$ .

Замечание. Вновь напомним, что собственные функции задачи (5.3.2) можно выписать лишь в исключительных случаях. Более того, даже в этих случаях для практических вычислений часто проще использовать метод, рассмотренный в следующем пункте.

## 5.4. Метод конечных элементов

В этом пункте мы кратко рассмотрим конструкцию проекционного метода решения краевой задачи для уравнения (5.2.1). Мы ограничимся случаем, когда на всей границе области  $\Omega$  задано однородное условие Дирихле. Умножив скалярно уравнение (5.2.1) на произвольную *вещественную* кусочно гладкую, непрерывную функцию  $\phi$ , равную нулю на  $\partial\Omega$ , получим равенство

<sup>22</sup>Как уже указывалось в предыдущей главе, существуют программы вычисления этих корней; см., например, статью A.Nowak, R.Bialecki, K.Kurpisz: Int. Journ. for Numer. Meth. in Engin., V.24 (1987), 419-445.

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) \cdot \phi = \int_{\Omega} f \cdot \phi. \quad (5.4.1)$$

Преобразуем (5.4.1) с помощью интегрирования по частям (п.1.5):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) \cdot \phi &= - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} D_k(\lambda \cdot D_k u) \cdot \phi = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \lambda \cdot D_k u \cdot D_k \phi = \int_{\Omega} \lambda \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \phi. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Аналогично п.4.5, будем искать приближенное решение краевой задачи в виде линейной комбинации конечного набора линейно независимых функций  $\{\phi_k\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , равных нулю на  $\partial\Omega$ . Коэффициенты этой линейной комбинации находят из системы линейных уравнений, которая получается подстановкой в (5.4.2)  $\phi = \phi_m$ ,  $m = 1, \dots, N$ . Элементы матрицы коэффициентов этой системы задаются формулой

$$a_{mk} = \int_{\Omega} \lambda \langle \nabla \phi_m, \nabla \phi_k \rangle, \quad m, k = 1, \dots, N, \quad (5.4.3)$$

а свободные члены – формулой

$$b_m = \int_{\Omega} f \cdot \phi_m, \quad m = 1, \dots, N. \quad (5.4.4)$$

Так же, как в одномерном случае, доказывается, что матрица коэффициентов  $A$  – положительно определенная (и потому система разрешима при любом  $N$ ).

Базисные функции естественно выбирать так, чтобы большинство элементов этой матрицы равнялись нулю. Для этого обычно область  $\Omega$  разбивают на части простой формы (их называют "конечными элементами"), а в качестве базисных функций используют сплайны, каждый из которых отличен от нуля только на нескольких "конечных элементах". Такая разновидность проекционного метода называется *методом конечных элементов*.

Терминологическое замечание. В литературе конечными элементами называют не только части, на которые разбивается область ("треугольные элементы", "прямоугольные элементы" и т. п.), но и порции

сплайнов, применяемые в методе ("линейные элементы" "квадратичные элементы" и т. п.).

Замечание. Идея метода конечных элементов была впервые предложена Р.Курантом<sup>23</sup>.

В простейшем случае, когда  $\Omega$  – прямоугольник  $]0, a[ \times ]0, b[$ , естественно строить базисные функции в виде попарных произведений одномерных "палаток" (п.4.5)

$$\Pi_{ij}(x, y) = \Pi_i(x) \cdot \Pi_j(y)$$

(перед подстановкой в (5.4.2)  $\Pi_{ij}$  следует перенумеровать для превращения двумерного массива в одномерный).

Такая функция отлична от нуля только на прямоугольнике  $]x_{i-1}, x_{i+1}[ \times ]y_{j-1}, y_{j+1}[$  (рис.5.2). Поэтому при фиксированных  $i$  и  $j$  отличны от нуля будут только *девять* интегралов

$$\int_{\Omega} \lambda \langle \nabla \Pi_{ij}, \nabla \Pi_{\kappa\mu} \rangle; \quad \kappa = i - 1, i, i + 1; \quad \mu = j - 1, j, j + 1,$$

для которых пересекаются соответствующие прямоугольники. Следовательно, каждая строка матрицы  $A$  будет иметь не более девяти ненулевых элементов.

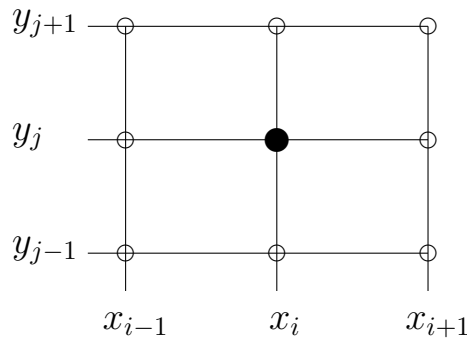


Рис.5.2

Несколько более экономичной, а также применимой к случаю плоской области  $\Omega$  достаточно общего вида оказывается вычислительная схема, в которой конечные элементы – треугольники<sup>24</sup> (такое разбиение

<sup>23</sup>Рихард КУРАНТ (R. Courant, 1888-1972) – немецкий математик, иностранный член АН СССР. С 1933 года работал в США. Его именем назван Институт математических наук в Нью-Йоркском университете. На русский язык переведены многие его книги, в т.ч. двухтомный труд "Методы математической физики".

<sup>24</sup>Естественно, границу  $\Omega$  для этого следует аппроксимировать многоугольником.



называется *триангуляцией*), а каждая базисная функция ("двумерная палатка")  $\tilde{\Pi}_{ij}$  – непрерывный сплайн второго порядка из шести порций, отличный от нуля только на фигуре, изображенной на рис.5.3. При этом значение "палатки" в центральном узле равно единице, в остальных – нулю, а ее график на каждом из составляющих фигуру треугольников представляет собой кусок плоскости. Таким образом, как и в одномерном случае, линейные комбинации палаток – всевозможные непрерывные сплайны второго порядка (только теперь уже от двух переменных), порождаемые данной триангуляцией.

В этой (наиболее часто применяемой) схеме отличными от нуля оказываются уже не более *семи* элементов строки матрицы коэффициентов системы (5.4.3).

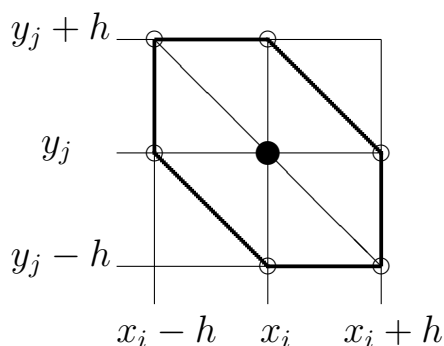


Рис.5.3

Сочетание положительной определенности и разреженности матриц позволило создать быстрые и эффективные алгоритмы решения систем. Аналогично п.4.5, компоненты вектора-решения системы дают значения приближенного решения краевой задачи в соответствующих узлах.

*Можно показать, что справедлива*

Теорема. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с гладкой границей;  $\lambda$  – непрерывно дифференцируемая в  $\Omega$  вплоть до границы функция,  $f$  кусочно непрерывна на  $\Omega$ . Если  $u$  – точное решение задачи Дирихле для уравнения (5.2.1), а

$$\hat{u}(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} \cdot \tilde{\Pi}_{ij}(x, y)$$

– приближенное решение, то при всех  $i, j$

$$|\hat{u}(x_i, y_j) - u(x_i, y_j)| \leq C \cdot h,$$

где  $h$  – шаг сетки (см. рис.5.3),  $C$  – некоторая положительная константа.

Замечания. 1. Для приближенного вычисления интегралов в формулах (5.4.3) – (5.4.4) обычно применяются квадратурные формулы, получающиеся аппроксимацией функций  $\lambda$  и  $f$  непрерывными сплайнами второго порядка на сетке (см. замечание **1** в конце п.4.5). Остается в силе также замечание **2** из п.4.5.

2. Обратите внимание, что, как и в одномерном случае, ни одно приближенное решение не имеет вторых производных. Но это и не нужно (см. замечание **3** из п.4.5)!

3. Идеи, изложенные в этом пункте, могут быть реализованы и в случае  $n > 2$ . Формулы (5.4.3) и (5.4.4), естественно, остаются без изменений, но построение триангуляции области и вычисление коэффициентов системы технически более сложно.

## Глава 6. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

### 6.1. Две содержательные задачи

Задача 1. В п.4.1 изучалась задача о стационарном тепловом режиме в *тонком* проводнике, нагреваемом током. Основой для построения математической модели при этом служило уравнение теплового баланса (4.1.2).

В нестационарном случае количество тепла в элементе проводника за время  $\Delta t$  изменится, что приведет к изменению температуры элемента. Поэтому вместо (4.1.2) следует написать новое уравнение теплового баланса

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = c \cdot \Delta x \cdot S \cdot (T(t + \Delta t, x) - T(t, x)) \quad (6.1.1)$$

( $c$  – объемная теплоемкость материала проводника).

Подставим в (6.1.1) выражения для  $\Delta Q_1$ ,  $\Delta Q_2$  и  $\Delta Q_3$ , полученные в п.4.1:

$$\begin{aligned} c \cdot \Delta x \cdot S \cdot (T(t + \Delta t, x) - T(t, x)) &= \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(\tau, x + \Delta x) - T(\tau, x)}{\Delta x} - \\ &- \lambda \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{T(\tau, x) - T(\tau, x - \Delta x)}{\Delta x} + \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot S. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Здесь  $\tau$  – некоторый момент времени из интервала  $]t, t + \Delta t[$ .

Из уравнения (6.1.2) можно получить два различных разностных уравнения с *двумя переменными*, заменяя  $\tau$  на  $t$  либо на  $t + \Delta t$ . Эти уравнения представляют собой дискретные модели исходной задачи.

Мы не будем выписывать получающиеся громоздкие выражения. Отметим лишь, что сокращая (6.1.2) на  $\Delta t \cdot \Delta x \cdot S$  и переходя к пределу ( $\Delta t = \Delta x = 0$ ), получим (в предположении достаточной гладкости функции  $T$ ) континуальную модель задачи – дифференциальное уравнение в частных производных

$$c \cdot D_t T = D_x (\lambda \cdot D_x T) + \gamma \quad (6.1.3)$$

(здесь учтено, что коэффициенты  $\lambda$  и  $c$  не зависят от  $t$ , но, вообще говоря, зависят от  $x$ ).

Уравнение (6.1.3) в память о породившей его содержательной задаче называется *уравнением теплопроводности*.

Задача 2. Рассмотрим (в упрощенном, естественно, виде) задачу о передаче электрической энергии по *длинной* линии.

В школьном курсе физики обычно считают, что напряжение и ток – функции времени, *не зависящие от точки проводника*. Это связано с тем, что электромагнитное поле распространяется со скоростью света – около  $3 \cdot 10^8$  м/с. Поэтому, например, для синусоидального тока стандартной частоты (50 Гц) за время изменения напряжения от минимального до максимального значения (0.01 с) точка минимума напряжения успеет "пробежать" по линии около 3000 км. Если длина линии составляет несколько метров, то, естественно, изменением тока и напряжения вдоль линии можно пренебречь.

Однако при передаче энергии на большие – сотни километров – расстояния эти изменения должны учитываться. Конечно, тот же эффект может возникнуть и в линии длиной в несколько сантиметров, если частота тока очень велика (например, в современном компьютере). В таких случаях линию называют длинной.

Итак, возьмем участок линии длиной  $\Delta x$  (рис. 6.1) и промежуток времени  $\Delta t$ .

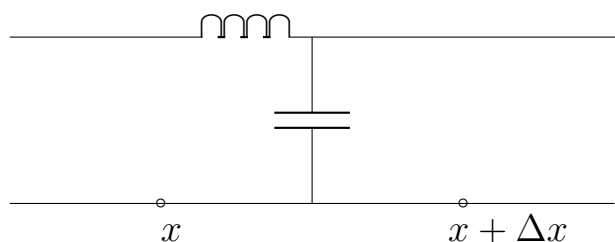


Рис.6.1

Пренебрегая потерями в активном сопротивлении проводника и утечкой тока из-за несовершенства изоляции, будем характеризовать этот участок удельной индуктивностью  $L$  и удельной емкостью  $C$ . Тогда падение напряжения на участке равно (по закону электромагнитной индукции)

$$u(x + \Delta x, \tau_1) - u(x, \tau_1) = -L \cdot \Delta x \frac{i(t + \Delta t, \xi_1) - i(t, \xi_1)}{\Delta t}.$$

Изменение величины тока (часть его уходит на заряд емкости) равно

$$i(x + \Delta x, \tau_2) - i(x, \tau_2) = -C \cdot \Delta x \frac{u(t + \Delta t, \xi_2) - u(t, \xi_2)}{\Delta t}.$$

В этих равенствах  $\tau_k$  и  $\xi_k$  ( $k = 1, 2$ ) – некоторые точки из интервалов  $]t, t + \Delta t[$  и  $]x, x + \Delta x[$  соответственно. Заменяя  $\xi_k$  на  $x$  или  $x + \Delta x$ , а  $\tau_k$  – на  $t$  или  $t + \Delta t$ , можно получить различные дискретные модели задачи – системы разностных уравнений.

Если разделить оба уравнения на  $\Delta x$  и, предполагая непрерывную дифференцируемость функций  $u$  и  $i$ , перейти к пределу ( $\Delta t = \Delta x = 0$ ), то получим континуальную модель задачи – систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} -D_t i = \frac{1}{L} \cdot D_x u; \\ D_x i = -C \cdot D_t u. \end{cases}$$

Если повысить требования к гладкости функций, входящих в уравнения этой системы, то, исключая, например,  $i$  (т.е. дифференцируя первое уравнение по  $x$ , а второе – по  $t$ ), получим

$$C \cdot D_{tt}^2 u = D_x \left( \frac{1}{L} \cdot D_x u \right) \quad (6.1.4)$$

(аналогично (6.1.3), коэффициенты  $L$  и  $C$  не зависят от  $t$ , но, вообще говоря, зависят от  $x$ ).

Если  $L$  и  $C$  – константы, то (6.1.4) можно переписать так:

$$D_{tt}^2 u = v^2 \cdot D_{xx}^2 u \quad (6.1.5)$$

(здесь  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ).

Убедитесь, что функция

$$u(x, t) = \varphi(x + vt) + \psi(x - vt),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, будет решением уравнения (6.1.5).

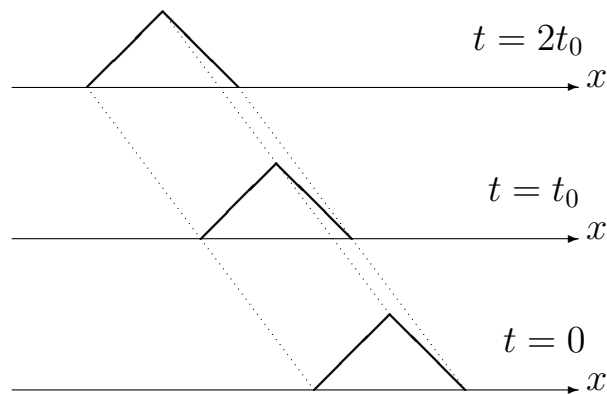


Рис.6.2. Положение волны в различные моменты времени

Заметим, что функция  $\varphi(x + vt)$  имеет очевидный физический смысл: она описывает *волну*, бегущую по линии со скоростью  $v$  в отрицательном направлении оси абсцисс (рис.6.2). Аналогично, функция  $\psi(x - vt)$  описывает волну, бегущую со скоростью  $v$  в положительном направлении оси абсцисс. Поэтому уравнение (6.1.5), как и более общее уравнение (6.1.4), называется *волновым уравнением*.

## 6.2. Основные определения

Уравнение (6.1.3) представляет собой пространственно одномерный вариант уравнения теплопроводности

$$r \cdot D_t u = \operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) + f, \quad (6.2.1)$$

возникающего при описании процессов теплопередачи, диффузии и некоторых других.

Здесь коэффициенты  $\lambda$  и  $r$  – заданные *положительные* непрерывные функции координат ( $\lambda$  имеет также непрерывные первые производные), а свободный член  $f$  – заданная кусочно непрерывная функция времени и координат (в (6.1.3)  $f = \gamma$ ).

Уравнение (6.2.1) рассматривается при  $t \in ]0, T_0]$ ,  $x \in \Omega$ , где  $\Omega$  – ограниченная область с кусочно гладкой границей в  $\mathbb{R}^n$  (в приложениях  $n$  может равняться 1, 2 или 3).

Замечание. Если  $\lambda$  и  $r$  – константы, уравнение теплопроводности принимает вид

$$D_t u = a^2 \Delta u + \frac{f}{r} \quad \left( a = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \right).$$

При постановке *начально-краевой задачи* к уравнению теплопроводности добавляют начальное условие

$$u(x, 0)|_{x \in \Omega} = u_0(x) \quad (6.2.2)$$

(т.е. задают начальное распределение температуры в области), а также краевое условие первого, второго или третьего рода, описанное в п.5.2.

Уравнение (6.1.4) представляет собой пространственно одномерный вариант волнового уравнения

$$r \cdot D_{tt}^2 u = \operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) + f, \quad (6.2.3)$$

которое описывает колебательные процессы разнообразной природы и возникает в задачах механики сплошной среды, акустики, электродинамики и других.

Здесь  $\lambda$ ,  $r$  и  $f$  – функции с теми же свойствами, что и в (6.2.1). Если  $\lambda$  и  $r$  – константы, волновое уравнение принимает вид

$$D_{tt}^2 u = v^2 \cdot \Delta u + \frac{f}{r} \quad (v = \sqrt{\frac{\lambda}{r}}).$$

Уравнение (6.2.3) рассматривается при  $t \in [0, T_0]$ ,  $x \in \Omega$ , где  $\Omega$  – ограниченная область с кусочно гладкой границей в  $\mathbb{R}^n$  (очевидно, в приложениях  $n = 1, 2$  или 3).

Добавляя к уравнению (6.2.3) два начальных условия

$$u(x, 0)|_{x \in \Omega} = u_0(x), \quad D_t u(x, 0)|_{x \in \Omega} = u_1(x),$$

а также краевое условие одного из типов, рассмотренных в п.5.2, получим *начально-краевую задачу* для волнового уравнения.

Замечание. Аналогично главам 4 и 5 краевые условия можно считать однородными.

### 6.3. Проекционные методы решения начально-краевых задач

В этом пункте кратко изложена идея применения проекционных методов для решения нестационарных задач. Мы ограничимся случаем, когда на всей границе области  $\Omega$  задано однородное условие Дирихле. Будем считать также, что  $r \equiv 1$ .

Начнем с уравнения теплопроводности. Зафиксируем  $t \in ]0, T_0]$  и умножим скалярно уравнение

$$D_t u = \operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) + f \tag{6.3.1}$$

на произвольную вещественную кусочно гладкую, непрерывную функцию  $\phi$ , равную нулю на  $\partial\Omega$ :

$$\int_{\Omega} D_t u \cdot \phi = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla u) + f) \cdot \phi.$$

Аналогично п.5.4, преобразуем правую часть этого равенства, применяя интегрирование по частям. Получим

$$\int_{\Omega} D_t u \cdot \phi = - \int_{\Omega} \lambda \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle + \int_{\Omega} f \cdot \phi. \tag{6.3.2}$$

"Интегральное тождество" (6.3.2) должно выполняться при всех  $t \in ]0, T_0]$ . В начальный момент времени (при  $t = 0$ ), очевидно, выполнено тождество, следующее из начального условия (6.2.2):

$$\int_{\Omega} u|_{t=0} \cdot \phi = \int_{\Omega} u_0 \cdot \phi. \quad (6.3.3)$$

Рассмотрим конечный набор линейно независимых *функций пространственных переменных*  $\{\phi_k\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , равных нулю на  $\partial\Omega$ . Будем искать приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения (6.3.1) в виде "линейной комбинации" функций  $\{\phi_k\}$ , коэффициенты которой – *функции времени*:

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \cdot \phi_k(x). \quad (6.3.4)$$

Подставляя в (6.3.2) и (6.3.3)  $\phi = \phi_m$ ,  $m = 1, \dots, N$ , получаем, что вектор коэффициентов  $c_k$  есть решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянной матрицей:

$$c'(t) = -A \cdot c(t) + b(t); \quad c(0) = c^{(0)}. \quad (6.3.5)$$

Элементы матрицы коэффициентов этой системы задаются формулой (5.4.3), свободные члены – формулой (5.4.4), а начальные данные определяются по формуле

$$c_m^{(0)} = \int_{\Omega} u_0 \cdot \phi_m, \quad m = 1, \dots, N.$$

Задача Коши (6.3.5), как известно, имеет единственное решение

$$c(t) = \exp(-At) \cdot c^{(0)} + \int_0^t \exp(-A(t-\tau)) \cdot b(\tau) d\tau, \quad (6.3.6)$$

и, таким образом, при любом  $N$  определено приближенное решение  $\hat{u}$ .

Если в качестве  $\{\phi_k\}$  взять первые  $N$  собственных функций стационарной краевой задачи

$$-\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla \varphi) = \nu \cdot \varphi, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.3.7)$$

то матрица  $A$  окажется диагональной:

$$A = \operatorname{diag}[\nu_1, \dots, \nu_N]$$



( $\nu_k$  – соответствующие собственные числа). В этом случае задача Коши (6.3.5) решается особенно просто (каждое уравнение можно решать независимо от остальных). *Можно показать, что* приближенное решение (6.3.4) при каждом  $t$  будет просто частной суммой ряда Фурье точного решения по системе собственных функций  $\{\phi_k\}$ .

Пример. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (6.1.3) при  $c = \lambda \equiv 1$  :

$$D_t u = D_{xx}^2 u + \gamma, \quad x \in ]0, 1[, \quad t > 0; \quad u(0, x) = 0; \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0.$$

Будем искать приближенное решение этой задачи в виде "линейной комбинации" собственных функций линейного оператора  $L\varphi \equiv -\varphi''$  с краевыми условиями  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ .

Так же, как в примере 1 п.4.4, получаем

$$\nu_k = k^2 \pi^2, \quad \varphi_k(x) = \sin(k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Задача Коши (6.3.5) принимает вид

$$c'_k = -\nu_k c_k + b_k, \quad c_k(0) = 0; \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$b_k = \left( \int_0^1 \gamma \cdot \varphi_k \right) / \left( \int_0^1 |\varphi_k|^2 \right) = \begin{cases} \frac{4\gamma}{k\pi}, & k \text{ нечетное;} \\ 0, & k \text{ четное} \end{cases}$$

(поскольку  $f$  здесь не зависит от  $t$ ,  $b_k$  также не зависят от  $t$ ).

Решение этой задачи Коши при нечетных  $k$  дается формулой

$$c_k(t) = b_k \cdot \int_0^t \exp(-\nu_k \cdot (t - \tau)) d\tau = \frac{4\gamma}{k^3 \pi^3} (1 - \exp(-k^2 \pi^2 t))$$

(при четных  $k$ , очевидно,  $c_k(t) \equiv 0$ ).

Отсюда получаем выражение для приближенного решения начально-краевой задачи:

$$\hat{u}(t, x) = \sum_{m=1}^N \frac{4\gamma}{(2m-1)^3 \pi^3} (1 - \exp(-(2m-1)^2 \pi^2 t)) \cdot \sin((2m-1)\pi x).$$

При  $N \rightarrow \infty$  получаем точное решение задачи в форме ряда Фурье:

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4\gamma}{(2m-1)^3 \pi^3} (1 - \exp(-(2m-1)^2 \pi^2 t)) \cdot \sin((2m-1)\pi x).$$

Замечания. 1. В случае, когда в уравнении (6.2.1)  $r \neq 1$ , вместо собственных функций краевой задачи (6.3.7) следует использовать собственные функции с весом  $r$  :

$$-div(\lambda \cdot \nabla \varphi) = \nu \cdot r \cdot \varphi, \quad \varphi \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

2. Вновь напомним, что все случаи, когда собственные функции краевой задачи можно выписать "в явном виде имеются в справочниках.

В общем случае в качестве набора  $\{\phi_k\}$  обычно выбирают "конечные элементы описанные в п.п. 4.5 и 5.4. Задача Коши (6.3.5) решается каким-нибудь из стандартных численных методов.

Начально-краевая задача для волнового уравнения

$$D_{tt}^2 u = div(\lambda \cdot \nabla u) + f$$

аналогичной процедурой приводится к задаче Коши для системы линейных дифференциальных уравнений *второго* порядка с постоянной матрицей:

$$c''(t) = -A \cdot c(t) + b(t); \quad c(0) = c^{(0)}, \quad c'(0) = c^{(1)},$$

где матрица коэффициентов и свободные члены определяются теми же формулами, что и раньше, а начальные данные – формулами

$$c_m^{(0)} = \int_{\Omega} u_0 \cdot \phi_m, \quad c_m^{(1)} = \int_{\Omega} u_1 \cdot \phi_m, \quad m = 1, \dots, N.$$

Поскольку эта система легко сводится к системе уравнений первого порядка, принципиальных отличий от рассмотренной выше схемы здесь нет. Обсуждение же технологических проблем выходит за рамки нашего курса.