

Раздел 2

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава 1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Метод полного исключения

Система m линейных алгебраических уравнений с n переменными⁴⁸ имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Здесь буквой a с двумя индексами обозначены заданные числа – коэффициенты системы (первый индекс – номер уравнения, второй – номер переменной), буквой b с одним индексом обозначены заданные числа – свободные члены уравнений. Буквой x с одним индексом обозначены числовые переменные.

Решением системы (1.1.1) называется упорядоченный набор из n чисел $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$, подстановка которых вместо переменных (\tilde{x}_1 вместо x_1, \dots, \tilde{x}_n вместо x_n) превращает все уравнения системы в верные числовые равенства.

Систему (1.1.1) можно записать короче, если ввести удобные обозначения.

Определение. Прямоугольную числовую таблицу из m строк и n столбцов будем называть *матрицей размера $m \times n$* или *$(m \times n)$ -матрицей*.

Примеры.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{– матрица размера } 2 \times 3;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{– матрица размера } 3 \times 2.$$

Матрица размера $m \times m$ называется *квадратной*, а число m – ее *порядком*. Элементы квадратной матрицы, у которых совпадают

⁴⁸Напомним, что под *переменной* понимается буква, вместо которой разрешено подставлять элементы некоторого заданного множества (вместо *числовой переменной* можно подставлять любые числа).

номер строки и номер столбца, называются *диагональными*; остальные – *внедиагональными*.

Матрицу размера $n \times 1$ будем называть *матрицей-столбцом* (или просто столбцом), а число n – *высотой* столбца.

Матрицу размера $1 \times t$ будем называть *матрицей-строкой* (или просто строкой), а число t – *шириной* строки.

Квадратную матрицу 1-го порядка (одноэлементную) мы будем отождествлять с ее элементом – числом.

Примеры.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ – столбец высоты 2; } \quad [1 \ 2 \ 3] \text{ – строка ширины 3;}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ – квадратная матрица порядка 2.}$$

Используя введенные термины, зададим систему (1.1.1) матрицей ее коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

и столбцом свободных членов

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Иногда матрицу коэффициентов и столбец свободных членов объединяют в *расширенную матрицу* системы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Пример. Система

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}.$$

имеет матрицу коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

и столбец свободных членов

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Можно объединить их в расширенную матрицу системы

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

При рассмотрении системы (1.1.1) возникают два вопроса:

- 1) существуют ли решения у этой системы?
- 2) если решения существуют, то сколько их и как их найти?

Прежде чем отвечать на эти вопросы, рассмотрим два частных случая.

1. Число уравнений системы равно числу переменных, а квадратная матрица коэффициентов имеет специальный вид (такую матрицу называют *единичной*):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1.2)$$

Запишем эту систему в "школьной" форме

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Очевидно, что система имеет решение, оно единственно, и, более того, уже фактически найдено:

$$x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_n = b_n.$$

2. Число уравнений системы (m) меньше числа переменных (n), и $(m \times n)$ -матрица коэффициентов имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \quad (1.1.3)$$

Запишем эту систему в "школьной" форме

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 1 \cdot x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \cdot x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

а затем перепишем ее в виде

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ x_2 = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots \\ \dots \\ x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Задав произвольно значения переменных x_{m+1}, \dots, x_n и вычислив x_1, \dots, x_m по формулам (1.1.4), мы получим, очевидно, решение системы.

Пусть теперь произвольная система вида (1.1.1) задана своей расширенной матрицей. Попытаемся привести матрицу ее коэффициентов к одному из видов (1.1.2) или (1.1.3) с помощью так называемых *элементарных* преобразований, которые не изменяют множество решений системы.

Под элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений мы понимаем:

- 1) изменение порядка уравнений в системе (перестановка строк ее расширенной матрицы);
- 2) изменение порядка расположения переменных в уравнениях (перестановка столбцов в матрице коэффициентов);
- 3) умножение обеих частей уравнения (строки расширенной матрицы) на отличное от нуля число;

4) прибавление к одному из уравнений системы другого, умноженного предварительно на некоторое число (прибавление к одной строке расширенной матрицы системы другой ее строки, умноженной на число).

Замечания. 1. Нетрудно убедиться в том, что перечисленные элементарные преобразования системы действительно не изменяют множество ее решений.

2. Порядок расположения переменных в уравнении важен, и его изменения должны запоминаться.

Теперь мы можем сформулировать алгоритм *полного исключения*, с помощью которого находятся все решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений с расширенной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & b_m^{(0)} \end{array} \right].$$

Алгоритм полного исключения.

1-й шаг.

1) Находим в матрице коэффициентов системы *ведущий* (наибольший по модулю) элемент. Если наибольших по модулю элементов несколько, то в качестве ведущего может быть взят любой из них.

Замечание. Мы предполагаем, естественно, что не все элементы матрицы коэффициентов равны нулю.

2) Переставляя (если нужно) строки расширенной матрицы и столбцы матрицы коэффициентов, помещаем ведущий элемент в первую строку и в первый столбец. Перестановки столбцов при этом запоминаем!

3) Делим первую строку расширенной матрицы на ведущий элемент. При этом на месте элемента $a_{11}^{(0)}$ появляется единица.

Если матрица состоит из одной строки, *работа алгоритма заканчивается*. Иначе переходим к п.4.

4) Прибавляя ко второй, третьей и т.д. строкам расширенной матрицы ее первую строку, умноженную соответственно на $-a_{21}^{(0)}$, $-a_{31}^{(0)}$ и т.д., преобразуем эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & \mathbf{a}_{22}^{(1)} & \dots & \mathbf{a}_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \mathbf{a}_{m2}^{(1)} & \dots & \mathbf{a}_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array} \right]. \quad (1.1.5)$$

Если в расширенной матрице появились нулевые строки, эти строки следует отбросить, уменьшив тем самым число уравнений в системе. Действительно, нулевая строка соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = 0,$$

которое удовлетворяется тождественно.

Если в расширенной матрице появилась строка вида $[0 \dots 0 \mid b_r^{(1)}]$, где $b_r^{(1)} \neq 0$, соответствующая уравнению

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_r^{(1)} \neq 0,$$

которое не удовлетворяется ни при каких значениях переменных, то преобразованная система несовместна, и, следовательно, несовместна равносильная ей исходная система. *Работа алгоритма закончена.*

Если после первого шага работа алгоритма не закончилась (не обнаружена несовместность системы и число строк в преобразованной расширенной матрице больше одной), то переходим ко второму шагу.

2-й шаг.

1) Рассмотрим выделенную жирным шрифтом подматрицу преобразованной матрицы⁴⁹ (1.1.5):

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_{22}^{(1)} & \dots & \mathbf{a}_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{s2}^{(1)} & \dots & \mathbf{a}_{sn}^{(1)} \end{array} \right].$$

Находим в этой подматрице ведущий элемент.

⁴⁹Отметим, что количество строк в этой матрице обозначено буквой s , а не m , так как после первого шага количество строк могло уменьшиться за счет отбрасывания нулевых ($s \leq m$).

2) Переставляя (если нужно) строки расширенной матрицы и столбцы матрицы коэффициентов, помещаем ведущий элемент во вторую строку и во второй столбец. Перестановки столбцов запоминаем!

3) Делим вторую строку расширенной матрицы на ведущий элемент, При этом на месте элемента $a_{22}^{(1)}$ появляется единица.

4) Прибавляя ко всем строкам расширенной матрицы, кроме второй, ее вторую строку, умноженную соответственно на $-a_{12}^{(1)}$, $-a_{32}^{(1)}$ и т.д., преобразуем эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}^{(2)}} & \dots & \mathbf{a_{3n}^{(2)}} & b_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{s3}^{(2)}} & \dots & \mathbf{a_{sn}^{(2)}} & b_s^{(2)} \end{array} \right] \cdot$$

Если после второго шага обнаружена несовместность системы или (после удаления возможно появившихся нулевых строк) расширенная матрица содержит две строки, то *работа алгоритма заканчивается*. Иначе – переходим к 3-му шагу.

Пусть теперь выполнен $(k-1)$ -й шаг, не обнаружена несовместность системы и в матрице осталось $s \geq k$ строк. Переходим к k -му шагу.

k -й шаг.

1) Рассмотрим подматрицу преобразованной матрицы коэффициентов

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{sk}^{(k-1)} & \dots & a_{sn}^{(k-1)} \end{array} \right] \cdot$$

Находим в этой подматрице ведущий элемент.

2) Переставляя (если нужно) строки расширенной матрицы и столбцы матрицы коэффициентов, помещаем ведущий элемент в k -ю строку и в k -й столбец. Перестановки столбцов при этом запоминаем!

3) Делим k -ю строку расширенной матрицы на ведущий элемент. При этом на месте элемента $a_{kk}^{(k-1)}$ появляется единица.

4) Прибавляя ко всем строкам расширенной матрицы, кроме k -й, ее k -ю строку, умноженную соответственно на $-a_{1k}^{(k-1)}, \dots, -a_{k-1,k}^{(k-1)}, -a_{k+1,k}^{(k-1)}, \dots, -a_{s,k}^{(k-1)}$, преобразуем эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,k+1}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{s,k+1}^{(k)} & \dots & a_{sn}^{(k)} & b_s^{(k)} \end{array} \right] .$$

Если после k -го шага обнаружена несовместность системы или (после удаления возможно появившихся нулевых строк) расширенная матрица содержит k строк, то *работа алгоритма заканчивается*. Иначе – переходим к $k + 1$ -му шагу.

Очевидно, что после выполнения не более, чем m шагов (m – число уравнений системы) работа алгоритма полного исключения заканчивается одним из трех исходов:

- 1) обнаруживается несовместность системы;
- 2) расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(r)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^{(r)} \end{array} \right] \quad (r - \text{число шагов}),$$

т.е. на месте столбца свободных членов получено *единственное* решение системы.

Напомним, что в процессе исключения столбцы матрицы коэффициентов могли меняться местами (перестановки столбцов запоминались!). Поэтому элементы полученного столбца свободных членов следует переупорядочить (см. пример ниже);

- 3) расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,s+1}^{(r)} & \dots & a_{1,n}^{(r)} & b_1^{(r)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,s+1}^{(r)} & \dots & a_{2,n}^{(r)} & b_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{s,s+1}^{(r)} & \dots & a_{s,n}^{(r)} & b_s^{(r)} \end{array} \right] ,$$

т.е. система имеет бесконечно много решений, которые находятся по формулам (1.1.4).

Терминологическое замечание. Алгоритм полного исключения называют также алгоритмом Гаусса–Йордана⁵⁰.

Серьезное предупреждение. Мы предполагаем, что элементы расширенной матрицы системы заданы *точно*, а все арифметические операции выполняются *без округления или усечения*. Только в этом редко встречающемся случае верны доказанные выше утверждения. Влияние погрешностей исходных данных и погрешностей, вносимых при вычислениях, будет рассмотрено в главе 13.

Рассмотрим несколько несложных примеров, задавая системы их расширенными матрицами. Над столбцами матрицы коэффициентов будем указывать их порядковые номера.

Пример 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 5 & 6 & 32 \\ 7 & 9 & 8 & 49 \end{array} \right].$$

1-й шаг.

1) Ведущий элемент 1-го шага $a_{32}^{(0)} = 9$.

2) Меняем местами первую и третью строки, первый и второй столбцы. Перестановки столбцов (изменение порядка переменных) запоминаем!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & \\ \hline 9 & 7 & 8 & 49 \\ 5 & 4 & 6 & 32 \\ 2 & 1 & 3 & 14 \end{array} \right].$$

⁵⁰Карл Фридрих ГАУСС (K.F. Gauss, 1777-1855) – немецкий математик, астроном, физик и геодезист, внесший существенный вклад практически во все области математики, почетный член Петербургской АН.

Вильгельм ЙОРДАН (W. Jordan, 1842-1899) – немецкий геодезист. Часто метод полного исключения ошибочно связывают с именем французского математика К.М.Э. ЖОРДАНА (С.М.Е. Jordan).

3) Делим первую строку расширенной матрицы на ведущий элемент.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & \\ \hline 1 & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} & \frac{49}{9} \\ 5 & 4 & 6 & 32 \\ 2 & 1 & 3 & 14 \end{array} \right].$$

4) Прибавляя ко второй и третьей строкам расширенной матрицы ее первую строку, умноженную соответственно на -5 и -2 , получаем расширенную матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & \\ \hline 1 & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} & \frac{49}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{14}{9} & \frac{43}{9} \\ 0 & -\frac{5}{9} & \frac{11}{9} & \frac{28}{9} \end{array} \right].$$

2-й шаг.

1) Ведущий элемент 2-го шага $a_{23}^{(1)} = \frac{14}{9}$.

2) Помещаем ведущий элемент во вторую строку и второй столбец, переставляя второй и третий столбцы. Перестановки столбцов запоминаем!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{8}{9} & \frac{7}{9} & \frac{49}{9} \\ 0 & \frac{14}{9} & \frac{1}{9} & \frac{43}{9} \\ 0 & \frac{11}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{28}{9} \end{array} \right].$$

3) Делим вторую строку расширенной матрицы на ведущий элемент.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{8}{9} & \frac{7}{9} & \frac{49}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{43}{14} \\ 0 & \frac{11}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{28}{9} \end{array} \right].$$

4) Прибавляя к первой и третьей строкам расширенной матрицы ее вторую строку, умноженную соответственно на $-\frac{8}{9}$ и $-\frac{11}{9}$, получаем расширенную матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{43}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{14} & -\frac{9}{14} \end{array} \right].$$

3-й шаг.

Подматрица, получающаяся из матрицы коэффициентов при удалении первой и второй строк, первого и второго столбца, состоит из единственного элемента $-\frac{9}{14}$. Он и является ведущим элементом 3-го шага и стоит на положенном ему месте. Пункты 1) и 2) уже выполнены.

3) Делим третью строку расширенной матрицы на ведущий элемент.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{43}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

4) Прибавляя к первой и второй строкам расширенной матрицы ее третью строку, умноженную соответственно на $-\frac{5}{7}$ и $-\frac{1}{14}$, получаем расширенную матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Работа алгоритма закончена. На месте столбца свободных членов стоит *единственное* решение системы. Порядок переменных указан в строке, стоящей над матрицей коэффициентов. Учитывая его, получаем

$$x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_1 = 1.$$

Пример 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{array} \right].$$

1-й шаг.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & \\ \hline 9 & 8 & 7 & 24 \\ 6 & 5 & 4 & 15 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{8}{9} & \frac{7}{9} & \frac{8}{3} \\ 6 & 5 & 4 & 15 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{8}{9} & \frac{7}{9} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \end{array} \right].$$

2-й шаг.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{8}{9} & \frac{7}{9} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Удаляем полученную нулевую строку.

Работа алгоритма закончена. С помощью равносильных преобразований система уравнений приведена к виду (1.1.3).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right].$$

Переносим слагаемые, содержащие x_2 , в правую часть, получим

$$x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot x_2; \quad x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot x_2. \quad (1.1.6)$$

Эта система уравнений (а, следовательно, и равносильная ей исходная) имеет бесконечно много решений, которые получаются из (1.1.6) при произвольно заданном значении x_2 .

Пример 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 15 \end{array} \right].$$

1-й шаг.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 15 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & \\ \hline 9 & 8 & 7 & 15 \\ 6 & 5 & 4 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{8}{9} & \frac{7}{9} & \frac{5}{3} \\ 6 & 5 & 4 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{8}{9} & \frac{7}{9} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array} \right].$$

2-й шаг.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & \frac{5}{3} \\ 1 & \frac{8}{9} & \frac{7}{9} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & \frac{5}{3} \\ 1 & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} & 1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & \frac{5}{3} \\ 1 & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & \frac{9}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array} \right].$$

Работа алгоритма закончена. Третье уравнение полученной системы имеет вид

$$0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = \frac{3}{2}.$$

Оно не удовлетворяется ни при каких значениях переменных. Полученная система (а, следовательно, и равносильная ей исходная) *несовместна*.

1.2. Однородные системы линейных уравнений

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю.

Теорема. Если число уравнений в однородной системе меньше, чем число переменных, то система имеет бесконечно много решений.

Доказательство. 1. Всякая однородная система имеет нулевое решение. Это утверждение проверяется подстановкой. Следовательно, однородная система не может быть несовместной.

2. В исходной системе количество строк меньше количества столбцов. При работе алгоритма Гаусса–Йордана количество переменных не меняется, а количество уравнений не растет (уменьшиться оно может за счет отбрасывания нулевых строк расширенной матрицы). Следовательно, результирующая матрица коэффициентов квадратной быть не может, т.е. решение не может быть единственным. Теорема доказана. ■

Глава 2. АЛГЕБРА МАТРИЦ

Матрицы, введенные нами для компактной записи систем линейных уравнений, имеют право и на самостоятельное существование. В этой главе мы рассмотрим операции над матрицами – матричную алгебру. Отметим сразу, что все операции матричной алгебры реализованы в средах конечного пользователя и в виде Фортран-программ.

2.1. Транспонирование и эрмитово сопряжение

Определение. Если A – строка ширины n , то матрицу-столбец высоты n , элементы которой равны соответствующим элементам A , называют *транспонированной по отношению к A* и обозначают A^T .

Если B – столбец высоты n , то матрицу-строку ширины n , элементы которой равны соответствующим элементам B , называют *транспонированной по отношению к B* и обозначают B^T .

Примеры.

Если $B = [4 \ 5]$, то $B^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$; если $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, то $A^T = [1 \ 2 \ 3]$.

Определение. Если A – $(m \times n)$ -матрица, то $(n \times m)$ -матрицу, столбцы которой равны соответствующим транспонированным строкам A (строки равны соответствующим транспонированным столбцам A), называют *транспонированной по отношению к A* и обозначают A^T .

$$a_{ij}^T = a_{ji} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Пример.

Если $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Определение. Квадратная матрица A , удовлетворяющая условию $A^T = A$, называется *симметричной*. Для симметричной матрицы порядка n выполнены равенства

$$a_{ij}^T = a_{ji} = a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n).$$

Определение. Если транспонировать матрицу A , а затем заменить каждый ее элемент комплексно сопряженным ему числом, то получится

матрица, которую называют *эрмитово*⁵¹ *сопряженной* (или просто *сопряженной*) *по отношению к* A и обозначают A^* .

$$a_{ij}^* = \overline{a_{ji}} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Пример.

$$\text{Если } A = \begin{bmatrix} 1 + 2i & 4 \\ 2 - i & 5 + 3i \\ 3 & 6 - 2i \end{bmatrix}, \quad \text{то } A^* = \begin{bmatrix} 1 - 2i & 2 + i & 3 \\ 4 & 5 - 3i & 6 + 2i \end{bmatrix}.$$

Имеют место очевидные соотношения

$$(A^T)^T = A; \quad (A^*)^* = A.$$

Определение. Квадратную матрицу, удовлетворяющую условию $A^* = A$, называют *самосопряженной* или *эрмитовой*. Для эрмитовой матрицы

$$a_{ij}^* = \overline{a_{ji}} = a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n)$$

(элементы, симметричные относительно диагонали, комплексно сопряжены). Отсюда, в частности, следует, что диагональные элементы эрмитовой матрицы вещественны.

2.2. Линейные операции над матрицами

Линейными операциями называют умножение матрицы на число и сложение матриц. Линейные операции выполняются *поэлементно*.

Определение. Если A – $(m \times n)$ -матрица, а α – число, то символом αA обозначают матрицу, получающуюся из A умножением каждого ее элемента на α .

$$B = \alpha A \iff b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Пример.

$$(-1.5) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & -3.0 & -4.5 \\ -6.0 & -7.5 & -9.0 \end{bmatrix}.$$

Определение. Если A и B – $(m \times n)$ -матрицы *одного размера*, то их суммой называют матрицу, получающуюся сложением соответствующих элементов A и B .

⁵¹Шарль ЭРМИТ (С. Hermite, 1822-1901) – французский математик, член Парижской АН, почетный член Петербургской АН.

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Пример.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}.$$

Матрицы разных размеров складывать нельзя!

Из определений очевидны следующие свойства линейных операций над матрицами (матрицы A, B, C, Θ – одного размера!):

- 1) $B + A = A + B$;
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 3) $A + \Theta = \Theta + A = A$

(здесь Θ – нулевая матрица, т.е. матрица, все элементы которой – нули);

- 4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- 5) $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(A + B)^* = A^* + B^*$;
- 6) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$; $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$

(здесь α и β – числа).

2.3. Умножение матриц

Умножение матрицы на матрицу определим сначала для случая, когда левый сомножитель – строка ширины n , а правый сомножитель – столбец высоты n .

$$[a_1, \dots, a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n] = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n.$$

Произведение строки (слева) и столбца (справа) есть (1×1) -матрица, которую мы ранее договорились отождествлять с числом.

Пример.
$$[1 \quad 2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть левый сомножитель – A – имеет строки ширины n , а правый – B – столбцы высоты n . Тогда матрица-произведение $C = A \cdot B$ определяется так: элемент c_{ik} есть произведение i -й строки левого сомножителя на k -й столбец правого.

$$C = A \cdot B \iff c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}.$$

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 68 \\ 122 & 167 \end{bmatrix}.$$

$$1 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 12 = 68.$$

Замечание. Из определения следует, что произведение $(m \times p)$ -матрицы на $(p \times n)$ -матрицу есть $(m \times n)$ -матрица.

Матрицы, размеры которых не согласованы, т.е. ширина левой не равна высоте правой, перемножать нельзя!

Известно, что умножение чисел

а) коммутативно: $a \cdot b = b \cdot a$,

б) ассоциативно: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

в) дистрибутивно относительно сложения: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Покажем, что умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно.

Во-первых, при изменении порядка сомножителей может нарушиться согласованность размеров. Например, если A – (3×4) -матрица, а B – (4×2) -матрица, то AB – (3×2) -матрица, а произведение BA не определено.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} ; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{произведение не определено.}$$

Во-вторых, даже если произведения двух матриц определены при любом порядке сомножителей, то размеры этих произведений могут быть различными. Так, например, если A – (2×4) -матрица, а B – (4×2) -матрица, то AB – (2×2) -матрица, а BA – (4×4) -матрица.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} ; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} .$$

Наконец, произведения квадратных матриц одного порядка заведомо определены при любом расположении сомножителей и представляют собой квадратные матрицы того же порядка. Однако и в этом случае произведения могут зависеть от расположения сомножителей. Например:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

В то же время существуют такие пары *квадратных* матриц, что $AB = BA$. В таком случае говорят, что матрицы A и B *коммутируют*. Например:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} .$$

Определение. Квадратная матрица, у которой все *внедиагональные* элементы равны нулю, называется *диагональной*. Мы будем писать

$$diag[d_1, d_2, \dots, d_n] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} .$$

Отметим, что умножение матрицы A на диагональную матрицу D *слева* приводит к умножению *строк* A на соответствующие (по номерам) элементы диагонали D , а умножение на D *справа* – к умножению на те же элементы *столбцов* A .

Примеры.

$$diag[2, 3, 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot diag[2, 3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

Определение. Матрица $I = diag[1, 1, \dots, 1]$ называется *единичной*. Это название объясняется тем, что она коммутирует с любой квадратной

матрицей того же порядка, причем $A \cdot I = I \cdot A = A$. Если необходимо указать порядок единичной матрицы, пишут I_n . Если A – $(m \times n)$ -матрица, то $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.

Остальные два свойства умножения чисел – ассоциативность и дистрибутивность относительно сложения – верны и для матриц (конечно, при условии согласованности размеров). Докажем это.

Ассоциативность. Пусть матрица A имеет размер $(m \times n)$, матрица B – $(n \times k)$ и матрица C – $(k \times s)$. Тогда

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Доказательство. Определим матрицы

$$P = A \cdot B, \quad Q = B \cdot C, \quad U = P \cdot C = (A \cdot B) \cdot C, \quad V = A \cdot Q = A \cdot (B \cdot C)$$

(проверьте согласованность размеров!).

Докажем равенство матриц U и V , имеющих общий размер $(m \times s)$, рассмотрев их соответствующие элементы:

$$u_{ij} = \sum_{r=1}^k p_{ir} c_{rj} = \sum_{r=1}^k \left(\sum_{t=1}^n a_{it} b_{tr} \right) c_{rj} = \sum_{r=1}^k \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tr} c_{rj};$$

$$v_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} q_{tj} = \sum_{t=1}^n a_{it} \left(\sum_{r=1}^k b_{tr} c_{rj} \right) = \sum_{t=1}^n \sum_{r=1}^k a_{it} b_{tr} c_{rj};$$

Видно, что u_{ij} и v_{ij} представляют собой суммы одних и тех же слагаемых и поэтому совпадают. ■

Дистрибутивность относительно сложения. Пусть A – матрица размера $(m \times n)$, а B и C – матрицы размера $(n \times k)$. Тогда

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Доказательство. Определим матрицы

$$R = A \cdot (B + C), \quad P = A \cdot B, \quad Q = A \cdot C.$$

(проверьте согласованность размеров!). Докажем, что $R = P + Q$. Действительно,

$$r_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} (b_{tj} + c_{tj}) = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj} + \sum_{t=1}^n a_{it} c_{tj} = p_{ij} + q_{ij}. \quad \blacksquare$$

Точно так же доказывается равенство

$$(L + M) \cdot N = L \cdot N + M \cdot N,$$

где L, M, N – матрицы с согласованными размерами.

Взаимодействие умножения матриц с операциями транспонирования и эрмитова сопряжения задается соотношениями

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T; \quad (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*.$$

Проверьте эти равенства, обратив внимание на порядок сомножителей слева и справа.

В терминах умножения матриц может быть записана система линейных алгебраических уравнений. Пусть A – заданная числовая матрица размера $(m \times n)$, b – заданный числовой столбец высоты m , x – переменный столбец высоты n , т.е. $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, где x_1, \dots, x_n – числовые переменные. Тогда

$$Ax = b \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

есть краткая запись системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

2.4. Матричные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$AX = B, \tag{2.4.1}$$

где A – заданная числовая $(m \times n)$ -матрица, B – заданная числовая $(m \times p)$ -матрица, X – переменная $(n \times p)$ -матрица:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mp} \end{bmatrix}.$$

Решением этого уравнения называется такая числовая $(n \times p)$ -матрица \tilde{X} , подстановка которой вместо переменной матрицы X превращает уравнение в равенство матриц $A\tilde{X} = B$.

Вспоминая правило умножения матриц, запишем уравнение (2.4.1) "по столбцам":

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}; \dots; A \cdot \begin{bmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1p} \\ \vdots \\ b_{mp} \end{bmatrix}. \quad (2.4.2)$$

Отсюда видно, что система линейных уравнений (1.1.1) есть частный случай матричного уравнения (2.4.1) при $p = 1$, и что матричное уравнение (2.4.1) равносильно p системам линейных уравнений.

Все системы в (2.4.2) имеют общую матрицу коэффициентов. Применяя к ним алгоритм Гаусса–Йордана, мы будем многократно повторять одни и те же вычисления – отличие будет только при работе со свободными членами. Поэтому следует решать эти системы одновременно. Технология видна из приведенного ниже примера.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 14 & 6 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}.$$

Записываем расширенную матрицу (над чертой – номера столбцов).

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 17 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 20 & 9 \end{array}.$$

1-й шаг.

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 17 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 20 & 9 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 4 & 2 & 1 & 17 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 14 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 20 & 9 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 14 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 20 & 9 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}.$$

2-й шаг.

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}.$$

3-й шаг.

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}.$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{Обратите внимание на порядок строк!}$$

Матричное уравнение

$$XA = B \quad (2.4.3)$$

приводят к виду (2.4.1), транспонируя обе его части:

$$A^T X^T = B^T.$$

Найдя описанным выше способом матрицу X^T , еще раз применяют операцию транспонирования:

$$X = (X^T)^T.$$

2.5. Обратная матрица

Определение. Если $A - (m \times n)$ -матрица, и существует решение уравнения $AX = I_m$, то это решение – $(n \times m)$ -матрицу X – называют *правой обратной матрицей* для A . Аналогично, если существует решение уравнения $YA = I_n$, то $(n \times m)$ -матрицу Y называют *левой обратной матрицей* для A .

Покажем, что из существования у матрицы и левой и правой обратных следует их совпадение.

$$\begin{aligned} (AX = I_m) \bigwedge (YA = I_n) &\implies \\ \implies Y = YI_m = Y(AX) = (YA)X = I_n X = X. & \quad (2.5.1) \end{aligned}$$

В этом случае матрицу $X = Y$ называют *обратной* к A и обозначают A^{-1} , а саму матрицу A называют *обратимой*.

Пример. Решив матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = I, \quad \text{получим} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Убедитесь в том, что $XA = I$ и, следовательно, $X = A^{-1}$.

Если матрица A обратима, то решение матричного уравнения (2.4.1) существует, единственно и задается формулой

$$X = A^{-1}B. \quad (2.5.2)$$

Действительно, умножив (2.4.1) на A^{-1} *слева*, получим (2.5.2), умножив же (2.5.2) на A *слева*, получим (2.4.1).

Аналогично, если A обратима, то решение матричного уравнения (2.4.3) существует, единственно и задается формулой

$$X = BA^{-1}. \quad (2.5.3)$$

Если матрица A обратима, то обратимы и матрицы A^{-1} , A^T , A^* . Убедитесь в справедливости равенств

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* .}$$

Теорема. Неквадратная матрица не может иметь обратной.

Доказательство. Пусть A – $(m \times n)$ -матрица, и $m < n$. Применим метод Гаусса–Йордана к уравнению $AX = I_m$. Поскольку число переменных в процессе исключения не меняется, а число уравнений разве что уменьшается, решение единственным быть не может – A необратима.

Если $m > n$, то такое же рассуждение показывает, что необратима $(n \times m)$ -матрица A^T , а, следовательно, необратима и A . ■

Итак, обратимыми могут быть только квадратные матрицы. Условия обратимости квадратных матриц будут получены в п.3.4.

Серьезное предупреждение. Может создаться впечатление, что для решения матричного уравнения $AX = B$ нужно найти матрицу A^{-1} и воспользоваться формулами (2.5.2) или (2.5.3). На самом деле этот путь бессмыслен, так как для нахождения обратной матрицы все равно нужно

решить матричное уравнение $AX = I$. Более того, матрица может быть необратимой, а уравнение $AX = B$ – все-таки разрешимым. Поэтому формулы (2.5.2) и (2.5.3) применяются для теоретических построений и никогда не используются в вычислениях.

2.6. Сведение комплексного матричного уравнения к вещественному

Рассмотрим матричное уравнение

$$CZ = W. \tag{2.6.1}$$

Здесь $C = A + iB$ – заданная *комплексная* $(m \times n)$ -матрица, $W = U + iV$ – заданная *комплексная* $(m \times p)$ -матрица и $Z = X + iY$ – переменная *комплексная* $(n \times p)$ -матрица, а A, B, U, V, X, Y – вещественные матрицы соответствующих размеров.

Перепишем (2.6.1) в виде

$$(A + iB) \cdot (X + iY) = U + iV. \tag{2.6.2}$$

Приравнивая по отдельности вещественные и мнимые части уравнений (2.6.2), получим систему *вещественных* матричных уравнений

$$\begin{cases} AX - BY = U \\ BX + AY = V \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что эта система равносильна одному матричному уравнению

$$\left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}, \tag{2.6.3}$$

которое называют оеществлением уравнения (2.6.1).

Заметим, что работать с уравнением (2.6.1) выгоднее, чем с (2.6.3), так как оно требует в два раза меньше оперативной памяти компьютера. Однако программы, работающие с комплексными уравнениями, к сожалению, до сих пор встречаются у нас реже, чем потребность в них.

Глава 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

3.1. Определение. Примеры

Зададим на множестве всех *квадратных числовых* матриц функцию, которая ставит в соответствие каждой такой матрице число, называемое ее *определителем* (*детерминантом*). Определитель квадратной матрицы A принято обозначать символом $\det(A)$.

Определение этой функции построим индуктивно.

Определение. *Определителем матрицы первого порядка* называется число – ее единственный элемент:

$$\det [a_{11}] = a_{11}.$$

Определение. Пусть теперь $n > 1$ – порядок матрицы, и мы умеем вычислять определитель матрицы $(n - 1)$ -го порядка.

Удалив из матрицы одну строку (i -ю) и один столбец (k -й), получим матрицу $(n - 1)$ -го порядка. Ее определитель (который мы по предположению умеем вычислять) назовем *дополнительным минором* элемента a_{ik} (стоящего на пересечении удаленных строки и столбца). Обозначается дополнительный минор M_{ik} . Число $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$ именуется *алгебраическим дополнением* элемента матрицы a_{ik} .

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad M_{11} = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad M_{23} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix};$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11}; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot M_{23}.$$

Определение. *Определителем квадратной числовой матрицы A порядка $n > 1$* называется число

$$\det(A) = a_{1k}A_{1k} + \dots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^n a_{ik}A_{ik}; \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3, 1, 1)$$

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов *любого* ее столбца на их алгебраические дополнения.

Замечания. 1. Сформулированное определение будет корректно, если доказать, что получаемое число *не зависит от выбора столбца*. Мы не приводим доказательство из-за его технической сложности.

2. Выражение (3.1.1) обычно называют *разложением определителя по k -му столбцу матрицы*.

Примеры. 1.
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Разложим определитель матрицы по ее первому столбцу

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} = \\ &= a_{11}\det[a_{22}] - a_{21}\det[a_{12}] = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Убедитесь в том, что результат не изменится, если разложение выполнить по второму столбцу.

Определитель матрицы *второго порядка* равен разности между произведением ее диагональных элементов и произведением ее внедиагональных элементов.

2.
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Разложим определитель этой матрицы по ее третьему столбцу

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = \\ &= a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} + a_{23}(-1)^{2+3}M_{23} + a_{33}(-1)^{3+3}M_{33} = \\ &= a_{13}\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} - a_{23}\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + a_{33}\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \\ &= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{aligned}$$

Убедитесь, что результат не изменится, если разлагать определитель по первому или по второму столбцу.

Замечание. Вычисление определителя матрицы второго порядка требует выполнения двух умножений и двух сложений. Вычисление определителя матрицы третьего порядка сводится (в соответствии с определением) к вычислению трех определителей матриц второго порядка, выполнению трех умножений и трех сложений. Соответственно,

вычисление определителя матрицы порядка n сводится к вычислению n определителей матриц $(n - 1)$ -го порядка и выполнению n умножений и n сложений.

Обозначим $F(n)$ количество арифметических операций, затрачиваемых на вычисление определителя матрицы порядка n . Из предыдущих рассуждений следует, что

$$F(n) > n \cdot F(n-1) > F(n-1), \quad \text{т.е.} \quad F(n) > n!$$

Эта простая оценка показывает, что "по определению" (3.1.1) определители матриц вычислять нельзя. Действительно, если принять, что одна арифметическая операция выполняется за 10^{-9} сек., то для вычисления определителя матрицы 20-го порядка потребуется более $20! \cdot 10^{-9}$ сек. ≈ 77 лет, а для вычисления определителя матрицы 30-го порядка – около 10^{16} лет!

Отметим один класс квадратных матриц, определители которых (в отличие от общего случая) легко вычислять "по определению". Это так называемые *треугольные* матрицы, т.е. квадратные матрицы, у которых равны нулю либо все поддиагональные элементы (*верхние треугольные* матрицы), либо все наддиагональные элементы (*нижние треугольные* матрицы).

Разложим определитель верхней треугольной матрицы по элементам первого столбца:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Полученный определитель опять разлагаем по элементам первого столбца

$$a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Повторяя эту операцию, получим

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Тот же результат, очевидно получится для нижней треугольной матрицы, если разлагать ее определитель по элементам последнего столбца. Итак,

Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

В частности, $\det(I) = \det(\text{diag}[1, 1, \dots, 1]) = 1$.

Эффективный метод вычисления определителя произвольной квадратной матрицы будет изложен в п.4.2.

3.2. Свойства определителя

Для начала условимся о компактной записи матрицы, при которой указываются не все ее элементы, а только имена ее столбцов:

$$A = [a^{(1)}, \dots, a^{(n)}],$$

где

$$a^{(1)} = [a_{11}, \dots, a_{n1}]^T, \quad \dots, \quad a^{(n)} = [a_{1n}, \dots, a_{nn}]^T.$$

1. Перестановка двух столбцов матрицы приводит к умножению ее определителя на (-1) .

Доказательство. Переставим в матрице A два *соседних* столбца, стоящих на k -м и $(k+1)$ -м местах:

$$A = [\dots \overset{(k)}{p} \quad \overset{(k+1)}{q} \quad \dots]; \quad A' = [\dots \overset{(k)}{q} \quad \overset{(k+1)}{p} \quad \dots].$$

Разложим $\det(A)$ по элементам k -го столбца, а $\det(A')$ – по элементам $(k+1)$ -го столбца:

$$\det(A) = p_1 A_{1k} + \dots + p_n A_{nk};$$

$$\det(A') = p_1 A'_{1,k+1} + \dots + p_n A'_{n,k+1}.$$

Поскольку при удалении из матриц A и A' столбца p получается одна и та же матрица, имеем $M_{ik} = M'_{i,k+1}$ ($i = 1, \dots, n$). Поэтому

$$A'_{i,k+1} = (-1)^{i+k+1} M'_{i,k+1} = (-1)(-1)^{i+k} M_{ik} = (-1) \cdot A_{ik},$$

откуда $\det(A') = (-1) \cdot \det(A)$, т.е. при перестановке *соседних* столбцов определитель матрицы умножается на (-1) .

Рассмотрим теперь произвольную пару столбцов

$$A = [\dots \overset{(i)}{p} \dots \overset{(k)}{q} \dots]; \quad A' = [\dots \overset{(i)}{q} \dots \overset{(k)}{p} \dots].$$

Поменяем их местами, последовательно переставляя соседние столбцы:

$$i \leftrightarrow i+1, \quad i+1 \leftrightarrow i+2, \quad \dots, \quad k-1 \leftrightarrow k, \quad k-1 \leftrightarrow k-2, \quad \dots, \quad i+1 \leftrightarrow i.$$

Таких перестановок $2(k-i)-1$. При каждой из них определитель умножается на (-1) , следовательно, в результате он умножится на $(-1)^{2(k-i)-1} = -1$. ■

2. Определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.

Доказательство. Пусть в матрице есть два одинаковых столбца. Поменяв их местами, мы матрицу не изменим, т.е. $A' = A$, и потому $\det(A') = \det(A)$. Но, согласно свойству **1**, $\det(A') = (-1) \cdot \det(A)$. Отсюда $\det(A) = 0$. ■

Зафиксируем в матрице все столбцы, кроме k -го, а k -й сделаем переменным. Тогда каждому значению этого столбца будет соответствовать число – значение определителя матрицы, т.е. на множестве столбцов будет задана функция

$$f(x) = \det([a^{(1)}, \dots, a^{(k-1)}, x, a^{(k+1)}, \dots, a^{(n)}]).$$

Покажем, что f – *линейная* функция, т.е. что

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для любых числовых столбцов x, y и любых чисел α, β .

3. Определитель матрицы – линейная функция каждого ее столбца. В частности, умножение столбца матрицы на число приводит к умножению на это число ее определителя.

Доказательство. Разлагая определитель

$$f(\alpha x + \beta y) = \det([\dots, \alpha x + \beta y, \dots])$$

по элементам переменного k -го столбца, получим

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) A_{ik} = \alpha \sum_{i=1}^n x_i A_{ik} + \beta \sum_{i=1}^n y_i A_{ik} = \\ &= \alpha \cdot \det([\dots, x, \dots]) + \beta \cdot \det([\dots, y, \dots]) = \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

4. Определитель матрицы не изменится, если к некоторому ее столбцу прибавить другой столбец, умножив его предварительно на любое число.

Доказательство. Выделим в матрице два столбца: $A = [\dots p \dots q \dots]$. Тогда в силу свойства **3** для любого числа α

$$\det([\dots p + \alpha q \dots q \dots]) = \det([\dots p \dots q \dots]) + \alpha \cdot \det([\dots q \dots q \dots]).$$

Но, согласно свойству **2**, $\det([\dots q \dots q \dots]) = 0$, т.е.

$$\det([\dots p + \alpha q \dots q \dots]) = \det([\dots p \dots q \dots]). \quad \blacksquare$$

5. Сумма произведений элементов столбца матрицы на алгебраические дополнения *соответствующих* элементов *другого* ее столбца равна нулю.

Доказательство. Сделаем k -й столбец матрицы A переменным. Тогда получим тождество относительно x :

$$\det[\dots x \dots] = x_1 A_{1k} + \dots + x_n A_{nk}.$$

Подставив вместо x m -й столбец ($m \neq k$), получим определитель матрицы с одинаковыми столбцами, который равен нулю:

$$0 = \det([\dots a^{(m)} \dots a^{(m)} \dots]) = a_{1m} A_{1k} + \dots + a_{nm} A_{nk}. \quad \blacksquare$$

Доказательство следующего утверждения технически сложно, и мы его опускаем.

6. Транспонирование матрицы не меняет ее определителя: $\det(A^T) = \det(A)$.

Следствия. 1. Утверждения **1** – **5**, доказанные для столбцов матрицы, верны и для ее строк.

2. Имеет место разложение определителя матрицы по элементам любой ее строки:

$$\det(A) = a_{k1}A_{k1} + \dots + a_{kn}A_{kn} = \sum_{i=1}^n a_{ki}A_{ki} \quad (k = 1, \dots, n).$$

3. Из свойства **6** и определения эрмитова сопряжения следует, что

7. Определители эрмитово сопряженных матриц – сопряженные комплексные числа: $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

Доказательство следующего свойства также опускается из-за его технической сложности.

8. Определитель произведения двух *квадратных* матриц равен произведению определителей сомножителей: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Для матриц второго порядка проверим это свойство прямым вычислением.

Пусть $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Тогда

$$\det(AB) = \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Рассматривая первый столбец матрицы-произведения как сумму двух столбцов, получим по свойству **3**:

$$\det(AB) = \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Теперь вторые столбцы матриц представлены в виде сумм. Поэтому

$$\det(AB) = \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} + \\ + \det \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы B – общие множители в столбцах. По свойству **3**

$$\det(AB) = b_{11}b_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} + b_{11}b_{22} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \\ + b_{21}b_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} + b_{21}b_{22} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Теперь во втором и в третьем слагаемом определители матриц равны соответственно $\det(A)$ и $-\det(A)$, а в первом и в четвертом – нулю (свойство **2**). Поэтому

$$\det(AB) = \det(A) \cdot (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Рассмотренные свойства определителя позволяют вычислять его путем преобразования матрицы в треугольную (определитель которой равен произведению диагональных элементов). Технологию рассмотрим на примере так называемой матрицы Вандермонда⁵² (z_1, \dots, z_n – комплексные числа)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Обозначим определитель матрицы Вандермонда $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Вычтем из n -го столбца матрицы ее $(n-1)$ -й столбец, умноженный на z_1 ; вычтем из $(n-1)$ -го столбца матрицы ее $(n-2)$ -й столбец, умноженный на z_1 ; ...; вычтем из 2-го столбца матрицы ее 1-й столбец, умноженный на z_1 . В силу свойства **4** определитель не изменится:

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & z_2 - z_1 & z_2(z_2 - z_1) & \dots & z_2^{n-2}(z_2 - z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n - z_1 & z_n(z_n - z_1) & \dots & z_n^{n-2}(z_n - z_1) \end{bmatrix}.$$

Разложим определитель по 1-й строке:

⁵²Александр Теофил ВАНДЕРМОНД (А.Т. Vandermonde, 1735-1796) – французский математик, член Парижской АН.

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} z_2 - z_1 & z_2(z_2 - z_1) & \dots & z_2^{n-2}(z_2 - z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n - z_1 & z_n(z_n - z_1) & \dots & z_n^{n-2}(z_n - z_1) \end{bmatrix}.$$

В силу свойства **3** можно вынести за знак определителя общие множители строк $(z_2 - z_1), \dots, (z_n - z_1)$:

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_2 - z_1) \cdot \dots \cdot (z_n - z_1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-2} \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что оставшийся определитель равен $V(z_2, \dots, z_n)$. Повторяя эту операцию, понижающую порядок матрицы, в конце концов получим

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{k=2}^n (z_k - z_1) \cdot \prod_{k=3}^n (z_k - z_2) \cdot \dots \cdot (z_n - z_{n-1}) = \prod_{m>k} (z_m - z_k).$$

Заметим, что если z_1, z_2, \dots, z_n — попарно различные числа, то определитель матрицы Вандермонда *отличен от нуля*.

3.3. Матричные уравнения с квадратной матрицей коэффициентов

Определение. Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется *вырожденной*.

Применим к уравнению с квадратной матрицей коэффициентов алгоритм Гаусса–Йордана. Используемые в нем элементарные преобразования либо не меняют определителя матрицы коэффициентов, либо умножают определитель на *отличное от нуля* число (проверьте это!).

1. Если определитель матрицы коэффициентов отличен от нуля, то в результате работы алгоритма он не может стать нулем. Поэтому в матрице коэффициентов не может появиться нулевая строка, и по завершении работы алгоритма эта матрица превратится в единичную.

Матричное уравнение с *квадратной невырожденной* матрицей коэффициентов имеет решение, и это решение единственно.

Это утверждение известно как теорема Крамера⁵³.

⁵³Габриель КРАМЕР (G. Cramer, 1704-1752) – швейцарский математик.

2. Если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, то работа алгоритма Гаусса–Йордана не может завершиться превращением этой матрицы в единичную. Следовательно,

Матричное уравнение с *квадратной вырожденной* матрицей коэффициентов либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.

Однородное уравнение не может быть несовместным. Поэтому

Однородное матричное уравнение с *квадратной вырожденной* матрицей коэффициентов имеет бесконечно много решений.

3.4. Структура обратной матрицы. Формулы Крамера

Рассмотрим теперь вопрос об обратимости квадратной матрицы A , т.е. о существовании решения матричных уравнений $AX = XA = I$.

Для начала заметим, что если матрица A обратима, то

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1. \quad (3.4.1)$$

Поэтому вырожденная матрица не может иметь обратной.

Для дальнейшего введем понятие матрицы, *присоединенной* к матрице A .

Пусть A – квадратная матрица. Заменяем каждый ее элемент его алгебраическим дополнением и транспонируем результат. Полученную матрицу называют *присоединенной к A* и обозначают \tilde{A} :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вычислим произведения $P = A\tilde{A}$ и $Q = \tilde{A}A$:

$$P_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{ir} A_{kr} = \delta_{ik} \cdot \det(A)$$

и, аналогично,

$$Q_{ik} = \sum_{r=1}^n A_{ri} a_{rk} = \delta_{ik} \cdot \det(A).$$

Здесь $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}$ – так называемый *символ Кронекера*⁵⁴.

Итак, $A\tilde{A} = \tilde{A}A = I \cdot \det(A)$.

Если $\det(A) \neq 0$, то

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} \right) = \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} \right) \cdot A = I,$$

т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}. \quad (3.4.2)$$

Мы не только доказали обратимость невырожденной матрицы, но и получили "явное выражение" для обратной матрицы.

Серьезное предупреждение. Формула (3.4.2) используется только в теоретических построениях. Вычислять обратную матрицу следует, решая уравнение $AX = I$. Убедиться в этом можно, хотя бы сравнив количества операций, необходимых для реализации этих двух методов.

Пусть теперь $Ax = b$ – система уравнений с квадратной невырожденной матрицей.

Найдем решение, умножив ее слева на $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$:

$$x = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} \cdot b = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$x_k = \frac{b_1 A_{1k} + \dots + b_n A_{nk}}{\det(A)} = \frac{\det(B_k)}{\det(A)}, \quad (k = 1 \dots, n), \quad (3.4.3)$$

где B_k - матрица, получающаяся из A заменой ее k -го столбца столбцом свободных членов.

Формулы (3.4.3) называют формулами Крамера. Они дают представление о структуре решения системы линейных уравнений с квадратной матрицей и *не должны использоваться для численного решения систем вследствие их очевидной неэффективности.*

⁵⁴Леопольд КРОНЕКЕР (L. Kronecker, 1823-1891) – немецкий математик, член Берлинской АН и Петербургской АН.

Глава 4. ТРЕУГОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

4.1. LU-разложение

При решении различных задач матричной алгебры оказывается полезным представить заданную матрицу в виде произведения нескольких матриц специальной структуры. Один из способов *факторизации* (разложения на множители) матрицы мы сейчас рассмотрим.

Итак, пусть задана квадратная матрица A .

1-й шаг. Найдем ведущий (наибольший по модулю) элемент A . Переставляя (если нужно) строки и столбцы, поместим ведущий элемент в 1-ю строку и в 1-й столбец. Далее обнулим *поддиагональные* элементы 1-го столбца, прибавляя к m -й строке ($m = 2, \dots, n$) первую строку, умноженную на $(-\frac{a_{m1}}{a_{11}})$.

Полученную матрицу обозначим $A^{(1)}$.

2-й шаг. Найдем ведущий элемент в подматрице, получающейся из $A^{(1)}$ вычеркиванием 1-го столбца и 1-й строки. Переставляя (если нужно) строки и столбцы, поместим ведущий элемент во 2-ю строку и во 2-й столбец. Далее обнулим *поддиагональные* элементы 2-го столбца, прибавляя к m -й строке ($m = 3, \dots, n$) вторую строку, умноженную на $(-\frac{a_{m2}}{a_{22}})$.

Полученную матрицу обозначим $A^{(2)}$.

k -й шаг. Рассмотрим в матрице $A^{(k-1)}$, полученной на предыдущем шаге, подматрицу

$$\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Найдем ее ведущий элемент. Переставляя (если нужно) строки и столбцы, поместим ведущий элемент в k -ю строку и в k -й столбец. Далее обнулим *поддиагональные* элементы k -го столбца, прибавляя к m -й строке ($m = k + 1, \dots, n$) k -ю строку, умноженную на $(-\frac{a_{mk}}{a_{kk}})$.

Если на каком-то шаге ведущий элемент окажется нулем, *работа алгоритма заканчивается*. Таким образом, после не более, чем $(n - 1)$ шагов мы преобразуем матрицу A в верхнюю треугольную матрицу, которую принято обозначать U (от английского "Upper").

В рассмотренном выше алгоритме использовались два элементарных преобразования матрицы – прибавление к ее строке другой строки, умноженной на число, и перестановки строк (столбцов). Покажем, что эти элементарные преобразования матрицы равносильны умножению ее на матрицы специального вида.

Обозначим $E_{km}(\alpha)$ ($k \neq m$) квадратную матрицу, получаемую из единичной заменой нуля в k -й строке и m -м столбце числом $\alpha \neq 0$.

Пример. Матрица 4-го порядка

$$E_{31}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Замечание. Если $k > m$, то $E_{km}(\alpha)$ – *нижняя* треугольная, если $k < m$ – *верхняя* треугольная.

Нетрудно убедиться, что умножив матрицу A на $E_{km}(\alpha)$ *слева*, мы прибавим к ее k -й строке m -ю строку, умноженную на α .

Пример.

$$\begin{aligned} E_{31}(-2) \cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & \dots & a_{24} \\ a_{31} & \dots & a_{34} \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & \dots & a_{24} \\ a_{31} - 2a_{11} & \dots & a_{34} - 2a_{14} \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Несложно также видеть (проверьте это!), что

$$E_{km}(\alpha) \cdot E_{km}(-\alpha) = I. \quad (4.1.1)$$

Если бы можно было провести описанный выше процесс преобразования матрицы в верхнюю треугольную без выбора ведущих элементов (т.е. без перестановок строк и столбцов), то с учетом установленных свойств матриц $E_{km}(\alpha)$ можно было бы написать

$$E_{n,n-1} \left(-\frac{a_{n,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \right) \cdot \dots \cdot E_{31} \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) \cdot E_{21} \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \cdot A = U. \quad (4.1.2)$$

Здесь U – верхняя треугольная матрица, а количество сомножителей слева от A равно количеству обнуляемых поддиагональных элементов матрицы n -го порядка, т.е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Выразим матрицу A из (4.1.2), используя тождество (4.1.1):

$$A = E_{21} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{11} \end{pmatrix} \cdot E_{31} \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{11} \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot E_{n,n-1} \begin{pmatrix} a_{n,n-1}^{(n-2)} \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \end{pmatrix} \cdot U. \quad (4.1.3)$$

Нетрудно убедиться (проверьте это!), что произведение нижних треугольных матриц есть нижняя треугольная матрица. Если же на диагоналях сомножителей стоят единицы, то и произведение имеет единичную диагональ.

Таким образом, слева от матрицы U в (4.1.3) стоит нижняя треугольная матрица с единичной диагональю. Обозначив ее L (от английского "Lower"), перепишем (4.1.3) в виде

$$A = LU.$$

Однако в реальном алгоритме присутствуют еще перестановки строк и столбцов матрицы. Введем *матрицу элементарных перестановок* Π_{km} , получающуюся из единичной перемещением единицы, стоящей в k -й строке в m -й столбец, а единицы, стоящей в m -й строке, – в k -й столбец.

Пример.

$$\begin{aligned} \Pi_{13} \cdot A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ * & * & * & * \\ p & q & r & s \\ * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & r & s \\ * & * & * & * \\ a & b & c & d \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \\ A \cdot \Pi_{13} &= \begin{bmatrix} a & * & p & * \\ b & * & q & * \\ c & * & r & * \\ d & * & s & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & * & a & * \\ q & * & b & * \\ r & * & c & * \\ s & * & d & * \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь звездочками обозначены элементы матриц, не меняющие своего положения. Видно, что умножая матрицу A на Π_{km} *слева*, мы переставляем в A k -ю и m -ю *строки*, а умножая ее на Π_{km} *справа*, переставляем k -й и m -й *столбцы*.

Отметим свойства матрицы элементарных перестановок.

1. В каждой ее строке и каждом столбце ровно одна единица; остальные элементы – нули.

2. $\Pi_{km} \cdot \Pi_{km} = I$ (дважды поменяв местами одну и ту же пару столбцов или строк, получаем исходную матрицу).

3. $\det(\Pi_{km}) = -1$ (перестановка двух строк или двух столбцов матрицы приводит к умножению ее определителя на (-1)).

Произведение нескольких матриц элементарных перестановок есть матрица, меняющая местами уже несколько пар столбцов (строк). Такая матрица называется *матрицей перестановок* и обладает свойством **1**. Ее определитель равен либо $(+1)$, либо (-1) . Матрица, обратная матрице перестановок, также есть матрица перестановок.

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Для каждой квадратной матрицы A существуют такие матрицы перестановок Π_1 и Π_2 , что

$$\Pi_1 \cdot A \cdot \Pi_2 = L \cdot U, \quad (4.1.4)$$

где L – нижняя треугольная матрица с единичной диагональю, а U – верхняя треугольная матрица.

Формула (4.1.4) называется *LU-разложением* или *треугольным разложением* матрицы A .

Доказательство мы опускаем из-за его технической сложности. Отметим, что Π_1 и Π_2 (а, следовательно, L и U) определены не единственным образом. Это следует, например, из того, что при выборе ведущего элемента может встретиться несколько равных по модулю наибольших элементов и, отдав предпочтение одному из них, мы получим одно из возможных *LU-разложений* матрицы.

Замечание. Иногда вместо *LU-разложения* используют так называемое *LDU-разложение* матрицы. Если A – невырожденная матрица, то в формуле (4.1.3) U – также невырожденная матрица. Положим $D = \text{diag}[u_{11}, \dots, u_{nn}]$ и $\tilde{U} = D^{-1}U$. Тогда \tilde{U} – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю, и справедливо соотношение

$$\Pi_1 \cdot A \cdot \Pi_2 = LD\tilde{U},$$

которое и называется *LDU-разложением* матрицы A .

4.2. Некоторые применения *LU-разложения*

1. Вычисление определителей. Используя формулу (4.1.4) и свойства определителей, мы можем написать:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(\Pi_1^{-1} \cdot L \cdot U \cdot \Pi_2^{-1}) = \\
&= \det(\Pi_1^{-1}) \cdot \det(L) \cdot \det(U) \cdot \det(\Pi_2^{-1}) = \\
&= (\pm 1) \cdot u_{11} \cdot \dots \cdot u_{nn} \quad (4.2.1)
\end{aligned}$$

(согласно п.3.1., $\det(L) = 1$, $\det(U) = u_{11} \cdot \dots \cdot u_{nn}$, а знак в правой части зависит от количества элементарных перестановок при выполнении LU -разложения матрицы).

В п.3.1 было показано, что вычисление определителя матрицы "по определению" невозможно, поскольку требуемое для его реализации количество операций превышает $n!$ (n – порядок матрицы). Можно показать, что LU -разложение требует порядка $\frac{n^3}{3}$ операций. При $n = 30$ это составит около $3 \cdot 10^4$ (сравните с полученной ранее оценкой $3 \cdot 10^{23}$ для вычисления "по определению"). После получения LU -разложения определитель вычисляется по формуле (4.2.1) элементарно.

2. Решение систем линейных уравнений. Если получено LU -разложение матрицы A , то решение системы $Ax = b$ сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами:

$$Ly = b, \quad Ux = y. \quad (4.2.2)$$

Решение системы с треугольной матрицей коэффициентов требует выполнения порядка n^2 операций (против n^3 для системы с заполненной матрицей коэффициентов). Правда, затраты времени на LU -разложение сравнимы с временем решения системы с заполненной матрицей и, на первый взгляд, выгоды не видно. Однако в приложениях весьма часто приходится неоднократно решать системы с одной и той же матрицей и различными правыми частями. В этом случае факторизация производится один раз, а затем каждый раз решаются системы (4.2.2), что при матрицах большого порядка дает весьма значительный выигрыш во времени.

5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

5.1. Основные понятия

Рассмотрим множество всех матриц-столбцов высоты n с комплексными элементами. Матрицы-столбцы будем обозначать в этом пункте латинскими буквами, а числа – греческими. Стобец с *нулевыми элементами* будем обозначать θ (или θ_n , если необходимо указать его высоту). Положим по определению $-x = (-1) \cdot x$ и будем называть столбец $-x$ *противоположным* столбцу x .

Известно, что матрицы-столбцы можно складывать и умножать на числа. Перечислим свойства этих операций.

$$1) x+y = y+x, \quad 2) (x+y)+z = (x+z)+y, \quad 3) x+\theta = x, \quad 4) x+(-x) = \theta;$$

$$5) 1 \cdot x = x, \quad 6) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x, \quad 7) (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

$$8) \alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Определение. Множество всех комплексных матриц-столбцов высоты n с введенными выше операциями сложения и умножения на число называется *линейным (векторным) пространством* и обозначается \mathbb{C}^n . Его элементы – $(n \times 1)$ -матрицы называются *векторами*.

Замечания. 1. Линейное пространство \mathbb{C}^n называют также *комплексным* линейным пространством в отличие от *вещественного* линейного пространства \mathbb{R}^n – множества всех *вещественных* матриц-столбцов высоты n , в котором разрешено умножение *только на вещественные* числа.

2. Линейное пространство \mathbb{R}^3 имеет очевидную геометрическую интерпретацию: каждому его вектору $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ можно сопоставить направленный отрезок, начало которого совмещено с началом координат, а конец расположен в точке с координатами x_1, x_2, x_3 (рис.5.1).

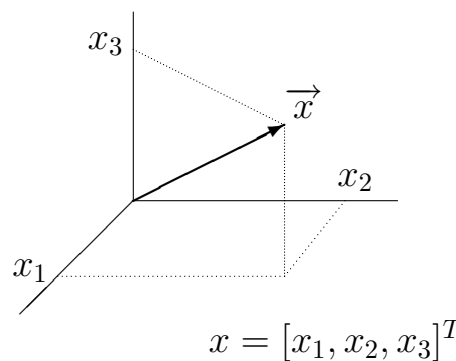


Рис.5.1

Аналогично, геометрическую интерпретацию линейного пространства \mathbb{R}^2 дают направленные отрезки на плоскости.

Будем обозначать направленный отрезок той же буквой, что и соответствующий ему вектор, но со стрелкой сверху. Нетрудно видеть, что

$$\overrightarrow{x + y} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}; \quad \overrightarrow{\alpha x} = \alpha \cdot \overrightarrow{x}.$$

5.2. Абстрактное линейное пространство

Может показаться, что уделено излишнее внимание перечислению известных свойств линейных операций над матрицами. Дело, однако, в том, что линейное пространство – одно из основных понятий современной математики.

Линейным пространством называют любое непустое множество, над элементами которого (векторами) можно производить две операции, именуемые *сложением* и *умножением на число*.

Сложение. Каждой паре элементов пространства (x, y) (векторов) ставится в соответствие вектор, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$. Эта операция должна удовлетворять следующим правилам:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Существует такой вектор θ , именуемый *нулевым*, что $x + \theta = x$ для любого вектора x .
4. Для каждого вектора x есть такой вектор $(-x)$, именуемый *противоположным* к x , что $x + (-x) = \theta$.

Умножение на число. Каждому вектору x и каждому числу α ставится в соответствие вектор αx , называемый их произведением. При этом

5. $1 \cdot x = x$.
6. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
7. $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.
8. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

Перечисленные восемь свойств называют *аксиомами линейного пространства*. Подчеркнем еще раз, что при построении теории не существенно, что представляют собой элементы линейного пространства –

векторы (лишь бы их можно было "складывать" умножать на числа и выполнялись аксиомы). Тогда будут справедливы все выводы построенной ниже теории. В нашем курсе мы рассматриваем, в основном, простейшие частные случаи – пространства \mathbb{C}^n и \mathbb{R}^n . Один пример линейного пространства, отличного от \mathbb{C}^n и \mathbb{R}^n , будет рассмотрен в п.5.5.

5.3. Линейная зависимость векторов

Пусть заданы векторы $a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \in \mathbb{C}^n$. Составим уравнение

$$\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)} = \theta, \quad (5.3.1)$$

в котором искомыми являются числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Уравнение (5.3.1) может быть переписано в виде $A\alpha = \theta_n$, где $A = [a^{(1)}, \dots, a^{(k)}]$ – заданная $(n \times k)$ -матрица, $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]^T$ – искомый вектор-столбец, т.е. оно представляет собой *однородную* систему линейных уравнений.

Очевидно, что при любых заданных векторах эта система имеет *нулевое* решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ ($\alpha = \theta_k$).

Может оказаться, что нулевое решение *единственно*. Так, например, если $a^{(1)} = [1 \ 0 \ 0]^T$, $a^{(2)} = [0 \ 1 \ 0]^T$, то уравнение

$$\alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)} = \theta_3 \iff [\alpha_1 \ \alpha_2 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$$

имеет *только нулевое* решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. В то же время известно, что однородная система линейных уравнений может иметь решения, отличные от нулевого (например, если число уравнений меньше, чем число переменных).

Определение. Если уравнение (5.3.1) имеет *только нулевое* решение, то множество векторов $\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$ называется *линейно независимым*. Если же это уравнение имеет *ненулевые* решения, то упомянутое множество векторов называется *линейно зависимым*.

Докажем теперь несколько утверждений, связанных с понятием линейной зависимости множества векторов.

1. Множество, состоящее из одного *ненулевого* вектора, линейно независимо.

Доказательство. $a \neq \theta \wedge \alpha a = \theta \implies \alpha = 0$. ■

2. Множество, содержащее нулевой вектор, линейно зависимо.

Доказательство. Уравнение $\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)} + \alpha \theta = \theta$ имеет очевидное ненулевое решение $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0, \quad \alpha = 1$.

Для дальнейшего нам необходимо ввести важное новое понятие.

Определение. Вектор $a = \alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)}$ называется *линейной комбинацией векторов* $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$.

3. Если множество векторов линейно зависимо, то хотя бы один из них есть линейная комбинация остальных.

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – ненулевое решение уравнения (5.3.1), существующее в силу линейной зависимости множества $\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$. Пусть для определенности $\alpha_m \neq 0$. Переносим в (5.3.1) слагаемое $\alpha_m a^{(m)}$ в правую часть и делим обе части на $-\alpha_m$, получим

$$a^{(m)} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_m}\right)a^{(1)} + \dots + \left(-\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\right)a^{(m-1)} + \left(-\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m}\right)a^{(m+1)} + \dots + \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_m}\right)a^{(k)}. \quad \blacksquare$$

4. Если хотя бы один из векторов множества есть линейная комбинация остальных, то множество линейно зависимо.

Доказательство. Пусть, например,

$$a^{(m)} = \alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_{m-1} a^{(m-1)} + \alpha_{m+1} a^{(m+1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)}.$$

Переносим все слагаемые в правую часть, получим

$$\theta = \alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_{m-1} a^{(m-1)} + (-1)a^{(m)} + \alpha_{m+1} a^{(m+1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)}.$$

Мы построили *ненулевое* ($\alpha_m = -1$) решение уравнения (5.3.1), т.е. множество $\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$ линейно зависимо. \blacksquare

Замечание. Доказанные выше утверждения **3** и **4** часто формулируют так: *линейная зависимость множества векторов равносильна возможности представления одного из них в виде линейной комбинации остальных.*

5. Множество векторов, содержащее линейно зависимую часть, линейно зависимо.

Доказательство. Пусть множество $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ содержит k векторов, и его часть $a^{(1)}, \dots, a^{(m)}$ ($m < k$) линейно зависима, т.е. уравнение $\beta_1 a^{(1)} + \dots + \beta_m a^{(m)} = \theta$ имеет ненулевое решение (среди чисел β_1, \dots, β_m есть отличные от нуля). Тогда и уравнение

$$\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_m a^{(m)} + \alpha_{m+1} a^{(m+1)} + \dots + \alpha_k a^{(k)} = \theta$$

имеет очевидное ненулевое решение

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_m = \beta_m; \quad \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_k = 0. \quad \blacksquare$$

6. Всякая непустая часть линейно независимого множества линейно независима.

Доказательство. От противного.

Замечания. 1. Если два ненулевых вектора в $\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ линейно зависимы, то соответствующие им направленные отрезки *коллинеарны* (лежат на одной прямой).

2. Если три ненулевых вектора в \mathbb{R}^3 линейно зависимы, то соответствующие им направленные отрезки *компланарны* (лежат в одной плоскости).

5.4. Размерность линейного пространства и его базис

Определение. Если в линейном пространстве P существует линейно независимое множество из n векторов, а всякое множество, содержащее более, чем n векторов, линейно зависимо, то говорят, что пространство имеет размерность n и пишут⁵⁵:

$$\dim(P) = n.$$

Пример. Докажем, что $\dim(\mathbb{C}^n) = n$.

Доказательство. Множество, состоящее из n векторов

$$e^{(1)} = [1, 0, \dots, 0]^T, e^{(2)} = [0, 1, \dots, 0]^T, \dots, e^{(n)} = [0, 0, \dots, 1]^T,$$

⁵⁵dimension (англ.) – размерность.

линейно независимо, так как уравнение $\alpha_1 e^{(1)} + \dots + \alpha_n e^{(n)} = \theta$, или

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

или, наконец, $I_n \alpha = \theta_n$, имеет единственное решение $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

В то же время любая часть \mathbb{C}^n , содержащая больше, чем n векторов, линейно зависима, так как при $m > n$ уравнение $\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_m a^{(m)} = \theta_n$ имеет ненулевое решение как однородная система, в которой количество переменных (m) превышает количество уравнений (n). ■

Замечание. Из нашего рассуждения следует, что и $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Если не ограничиваться линейными пространствами \mathbb{C}^n и \mathbb{R}^n , то нельзя исключить случай, когда существуют линейно независимые множества, содержащие как угодно много векторов. Поэтому мы введем

Определение. Если для любого натурального числа n в линейном пространстве существует линейно независимое множество, состоящее из n векторов, то линейное пространство называется *бесконечномерным*.

Для *конечномерных* линейных пространств введем понятие базиса.

Определение. *Базисом* n -мерного линейного пространства называется любой упорядоченный линейно независимый набор из n векторов этого пространства.

Пример. Векторы $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$, введенные выше, образуют базис в \mathbb{C}^n и в \mathbb{R}^n . Его называют *стандартным* базисом.

Роль базиса в конечномерном пространстве определяет

Теорема. Всякий вектор конечномерного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса, и такое представление единственно.

Доказательство. Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ – базис, и b – произвольный вектор. По определению размерности пространства множество $b, a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$, содержащее более, чем n векторов, линейно зависимо. Поэтому уравнение $\alpha b + \alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_n a^{(n)} = \theta$ имеет ненулевое решение. В частности, $\alpha \neq 0$, ибо иначе имело бы ненулевое решение уравнение $\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_n a^{(n)} = \theta$, и базис оказался бы линейно зависимым множеством! А если $\alpha \neq 0$, то

$$b = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) a^{(1)} + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha}\right) a^{(n)},$$

и возможность представления произвольного вектора в виде линейной комбинации базисных векторов доказана.

Докажем *единственность* такого представления. Пусть имеются два представления вектора в виде линейной комбинации базисных векторов: $b = \beta_1 a^{(1)} + \dots + \beta_n a^{(n)}$ и $b = \gamma_1 a^{(1)} + \dots + \gamma_n a^{(n)}$. Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$\theta = (\beta_1 - \gamma_1) a^{(1)} + \dots + (\beta_n - \gamma_n) a^{(n)}.$$

Отсюда, вследствие линейной независимости базиса, все коэффициенты при его векторах – нули, т.е. $\beta_1 = \gamma_1, \dots, \beta_n = \gamma_n$.

Определение. Представление вектора в виде линейной комбинации векторов базиса называют *разложением вектора по базису*, а коэффициенты этого разложения – *координатами* этого вектора в этом базисе.

Замечания. 1. Отметим существенность фиксации порядка векторов в базисе (упорядоченности базиса). Изменив порядок векторов в базисе, получим, конечно, опять базис, но другой!

2. Обратите внимание на то, что разложение вектора b по базису $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$, т.е. решение уравнения

$$\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_n a^{(n)} = b \tag{5.4.1}$$

сводится в \mathbb{C}^n и в \mathbb{R}^n к решению матричного уравнения

$$A\alpha = b, \tag{5.4.2}$$

где, как всегда, $A = [a^{(1)}, \dots, a^{(n)}]$, $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$.

Таким образом, (5.4.1) и (5.4.2) представляют собой попросту две различные формы записи одного и того же уравнения – "векторную" и "матричную".

Следствия. 1. Если столбцы квадратной матрицы линейно независимы (т.е. составляют базис \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n)), то система линейных уравнений (5.4.2) имеет единственное решение при любом столбце свободных членов.

2. Поскольку единственность решения линейной системы с квадратной матрицей равносильна (как уже известно) невырожденности этой

матрицы, то линейная независимость столбцов квадратной матрицы также равносильна ее невырожденности. Итак, если A – квадратная матрица порядка n , то равносильны следующие три утверждения:

- 1) $\det(A) \neq 0$;
- 2) столбцы матрицы A образуют базис \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n);
- 3) система линейных уравнений $Ax = b$ при любом столбце b имеет единственное решение.

5.5. Пространство полиномов порядка n

Как известно, полиномом *степени* $k \geq 0$ называется функция, действующая из \mathbb{C} в \mathbb{C} по правилу

$$p(z) = p_1 + p_2z + \dots + p_{k+1}z^k, \quad (5.5.1)$$

где p_1, \dots, p_{k+1} – заданные комплексные числа, называемые *коэффициентами полинома*, причем $p_{k+1} \neq 0$.

Замечание. Если коэффициенты полинома – вещественные числа, то (5.5.1) определяет также функцию, действующую из \mathbb{R} в \mathbb{R} .

Определение. Назовем линейным пространством полиномов *порядка* n множество, содержащее все полиномы, *степень* которых *строго меньше* n , и функцию $\theta(z)$, тождественно равную нулю (напомним, что эта функция называется *нуль-полиномом*; степень нуль-полинома не определена). Иначе говоря, полиномом *порядка* n будем называть функцию $p(z) = p_1 + p_2z + \dots + p_nz^{n-1}$, где p_1, \dots, p_n – произвольный набор комплексных чисел (в том числе он может состоять из одних нулей).

Линейное пространство полиномов *порядка* n будем обозначать \mathbb{P}_n . В этом пространстве естественным образом определены сумма полиномов и произведение полинома на число:

$$(p + q)(z) = (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2)z + \dots + (p_n + q_n)z^{n-1};$$

$$(\alpha p)(z) = (\alpha p_1) + (\alpha p_2)z + \dots + (\alpha p_n)z^{n-1}.$$

Замечание. Обратите внимание на то, что *степень* полинома не обязана сохраняться при сложении и умножении на число. Например, складывая два полинома *второй* степени $p(z) = z^2 + 1$ и $q(z) = -z^2$, получаем полином нулевой степени $(z^2 + 1) + (-z^2) = 1$. Поскольку для полинома $p(z)$ *любой* степени $0 \cdot p(z) = \theta(z) \equiv 0$, степень произведения полинома на число может быть и вовсе не определена. Поэтому *порядок* полинома является для наших целей более удобной характеристикой, чем *степень*.

Предлагаем читателю убедиться самостоятельно, что множество \mathbb{P}_n с введенными в нем операциями сложения и умножения на число, "авансом" названное нами *линейным пространством*, действительно является таковым (т.е. удовлетворяет аксиомам, приведенным в п.5.2). Роль нулевого элемента играет при этом нуль-полином, а роль противоположного полиному p элемента – полином

$$(-p)(z) = (-p_1) + (-p_2)z + \dots + (-p_n)z^{n-1}.$$

Теорема. Размерность пространства \mathbb{P}_n равна n .

Доказательство. Рассмотрим множество, состоящее из n полиномов

$$e^{(1)}(z) \equiv 1, \quad e^{(2)}(z) = z, \dots, \quad e^{(n)}(z) = z^{n-1}.$$

Все эти полиномы, очевидно, принадлежат \mathbb{P}_n . Составим уравнение

$$\alpha_1 e^{(1)}(z) + \dots + \alpha_n e^{(n)}(z) = \theta(z) \equiv 0. \quad (5.5.2)$$

Зафиксируем n попарно различных чисел z_1, \dots, z_n и, полагая в (5.5.2) $z = z_k, \quad k = 1, \dots, n$, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 z_1 + \dots + \alpha_n z_1^{n-1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 + \alpha_2 z_n + \dots + \alpha_n z_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

или, в матричной записи, $E\alpha = \theta$, где E – матрица Вандермонда.

Поскольку числа z_1, \dots, z_n попарно различны, $\det(E) \neq 0$ (см. п.3.2). Поэтому уравнение (5.5.2) имеет только нулевое решение, и, значит, рассматриваемый набор полиномов линейно независим.

С другой стороны, если множество

$$\begin{aligned} p^{(1)}(z) &= p_{11} + p_{21}z + \dots + p_{n1}z^{n-1}, \\ \dots\dots\dots \\ p^{(k)}(z) &= p_{1k} + p_{2k}z + \dots + p_{nk}z^{n-1} \end{aligned}$$

содержит более, чем n полиномов ($k > n$), то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях уравнения

$$\alpha_1 p^{(1)}(z) + \dots + \alpha_k p^{(k)}(z) = \theta(z),$$

получим *однородную* систему из n уравнений с k переменными ($k > n$), которая имеет ненулевые решения. Следовательно, всякое множество, содержащее более, чем n полиномов из \mathbb{P}^n , линейно зависимо.

Мы доказали, что $\dim(\mathbb{P}_n) = n$, и показали, что упорядоченный набор полиномов $e^{(1)}(z) \equiv 1$, $e^{(2)}(z) = z$, \dots , $e^{(n)}(z) = z^{(n-1)}$ образует базис \mathbb{P}_n . Этот базис называют стандартным.

Замечания. 1. Разложение полинома порядка n по стандартному базису очевидно совпадает с его записью по возрастающим степеням переменной.

2. Из-за специфики конкретных задач могут оказаться более удобными разложения полинома по другим базисам \mathbb{P}_n . С примерами таких задач мы познакомимся в п.п. 5.6 и 11.3. Здесь следует лишь отметить, что разложения полинома в разных базисах суть тождественные преобразования этого полинома.

5.6. Полиномиальная интерполяция

Рассмотрим задачу, часто встречающуюся в приложениях: построить полином по его значениям в заданных точках.

Такая задача называется задачей *полиномиальной интерполяции*. Ее решение базируется на следующей теореме.

Теорема. Существует полином порядка n , который в заданных n точках принимает заданные значения, и такой полином один.

Доказательство. Пусть z_1, \dots, z_n — заданные *попарно различные* числа. Положим

$$\begin{aligned} l^{(1)}(z) &= \frac{(z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot \dots \cdot (z - z_n)}{(z_1 - z_2) \cdot (z_1 - z_3) \cdot \dots \cdot (z_1 - z_n)}; \\ l^{(2)}(z) &= \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_3) \cdot \dots \cdot (z - z_n)}{(z_2 - z_1) \cdot (z_2 - z_3) \cdot \dots \cdot (z_2 - z_n)}; \\ &\dots\dots\dots \\ l^{(n)}(z) &= \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_{n-1})}{(z_n - z_1) \cdot (z_n - z_2) \cdot \dots \cdot (z_n - z_{n-1})}. \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

Очевидно, что степень каждого из этих полиномов равна $n - 1$ и, следовательно, они принадлежат \mathbb{P}_n . Далее, легко видеть, что

$$l^{(m)}(z_k) = \delta_{mk}, \quad k, m = 1, \dots, n \tag{5.6.2}$$

(напомним, что δ_{mk} — символ Кронекера).

Составим уравнение

$$\alpha_1 l^{(1)}(z) + \dots + \alpha_n l^{(n)}(z) = \theta(z) \equiv 0 \tag{5.6.3}$$

и положим в нем поочередно $z = z_1, \dots, z = z_n$. Используя (5.6.2), найдем, что уравнение (5.6.3) имеет *только нулевое* решение, т.е. полиномы (5.6.1) линейно независимы и образуют базис \mathbb{P}_n .

Построим теперь полином L порядка n , принимающий в n заданных точках заданные значения:

$$L(z_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.6.4)$$

Искать его будем в виде разложения по построенному базису (5.6.1)

$$L(z) = \sum_{m=1}^n \alpha_m l^{(m)}(z).$$

Выписывая условия (5.6.4), получим систему уравнений для определения коэффициентов разложения

$$L(z_k) = \sum_{m=1}^n \alpha_m l^{(m)}(z_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Подставив сюда (5.6.2), получим

$$\sum_{m=1}^n \alpha_m l^{(m)}(z_k) = \sum_{m=1}^n \alpha_m \delta_{mk} = \alpha_k = y_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad \blacksquare$$

Мы не только доказали теорему, но и получили явное выражение для единственного полинома порядка n , принимающего в n заданных точках заданные значения:

$$L(z) = \sum_{m=1}^n y_m l^{(m)}(z).$$

Его называют *интерполяционным полиномом в форме Лагранжа*.

Замечание. Существенно, что в теореме фиксируется *порядок* интерполяционного полинома, а не его *степень*. Взяв, например, $y_k \equiv 1$ при $k = 1, \dots, n$, получим для *любого* n $L(z) \equiv 1$ – полином *нулевой* степени.

Пример. Построим полином третьего порядка, соответствующий таблице

z	1	2	3
y	4	5	6

$$L(z) = 4 \cdot \frac{(z-2)(z-3)}{(1-2)(1-3)} + 5 \cdot \frac{(z-1)(z-3)}{(2-1)(2-3)} + 6 \cdot \frac{(z-1)(z-2)}{(3-1)(3-2)} = z + 3.$$

Глава 6. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

6.1. Основные понятия

Пусть A – матрица размера $(m \times n)$. Умножение вектора из \mathbb{C}^n на эту матрицу слева дает вектор из \mathbb{C}^m . Таким образом, можно сказать, что $(m \times n)$ -матрица A порождает отображение линейного пространства \mathbb{C}^n в линейное пространство \mathbb{C}^m :

$$x \longrightarrow Ax.$$

Отметим два важных свойства этого отображения.

1. Образ суммы двух векторов есть сумма их образов:

$$A(x^{(1)} + x^{(2)}) = Ax^{(1)} + Ax^{(2)}.$$

2. При умножении вектора на число его образ умножается на то же число:

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax).$$

Свойства **1** и **2** можно объединить и переформулировать так: для любых векторов $x^{(1)}, x^{(2)}$ и для любых чисел α_1, α_2

$$A(\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)}) = \alpha_1 Ax^{(1)} + \alpha_2 Ax^{(2)}.$$

Отображения, обладающие этим свойством, называются *линейными* (сравните со свойством **3** определителя матрицы, п.3.2). Итак, матрица порождает *линейное отображение* \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m (*линейный оператор*, действующий из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m).

Заметим, что если A – $(m \times n)$ -матрица с *вещественными* элементами и $x \in \mathbb{R}^n$, то $Ax \in \mathbb{R}^m$, т.е. вещественная матрица порождает еще и линейный оператор, действующий из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m .

Если A – квадратная матрица, то она порождает отображение линейного пространства в себя. Рассмотрим пример такого отображения. Пусть $n = 2$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$Ay = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot x.$$

Видно (рис.6.1), что умножение вектора y на матрицу A не только "растягивает" соответствующий этому вектору направленный отрезок \vec{y} , но и "поворачивает" его, в то время как направленные отрезки \vec{x} и Ax коллинеарны.

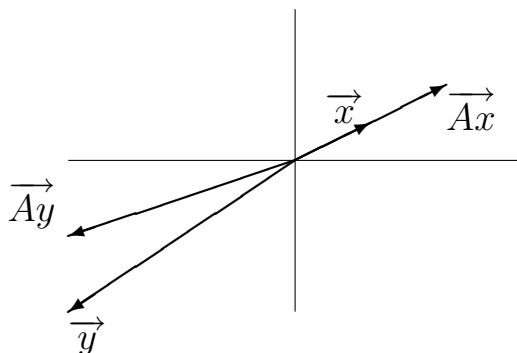


Рис.6.1

Определение. Пусть A – квадратная $(n \times n)$ -матрица. Если для некоторого комплексного числа λ и некоторого *ненулевого* вектора $x \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство

$$Ax = \lambda x, \quad (6.1.1)$$

то λ называется *собственным числом* (или *собственным значением*) матрицы A , а x – *собственным вектором* этой матрицы, *соответствующим собственному числу* λ .

Замечания. 1. В случае, когда речь идет о собственных числах нескольких матриц, например, A и B , целесообразно использовать обозначения $\lambda(A)$ и $\lambda(B)$.

2. Условие $x \neq \theta$ для собственного вектора существенно, так как $A\theta = \lambda\theta$ при *любом* λ , и этот случай не представляет интереса.

6.2. Полная проблема собственных значений

Полной проблемой собственных значений называют задачу о нахождении всех собственных чисел и собственных векторов квадратной матрицы. Эта задача наряду с задачей о решении системы линейных уравнений составляет основное содержание линейной алгебры.

Преобразуем уравнение (6.1.1), определяющее собственные числа и соответствующие им собственные векторы.

$$Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = \theta \iff (A - \lambda I)x = \theta. \quad (6.2.1)$$

В (6.2.1) n уравнений (*нелинейных!*) с $(n + 1)$ переменными: x_1, \dots, x_n и еще λ .

Заметим, однако, что при фиксированном λ эта система становится линейной и однородной, и, следовательно, существование у нее ненулевых решений равносильно вырожденности матрицы ее коэффициентов. Итак, собственные числа матрицы A – это в точности корни уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (6.2.2)$$

Исследуем это уравнение. Как известно, определитель матрицы вычисляется через ее элементы с помощью операций умножения и сложения. С другой стороны, элементы матрицы $A - \lambda I$ – это полиномы относительно λ . Следовательно, $\det(A - \lambda I)$ – тоже полином относительно λ . Он называется *характеристическим полиномом матрицы A* , и мы будем обозначать его $P_A(\lambda)$.

Примеры. 1. $n = 1$, $A = [a_{11}]$; $P_A(\lambda) = \det[a_{11} - \lambda] = a_{11} - \lambda$.

$$\begin{aligned} 2. \quad n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad P_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= \det(A) - Sp(A) \cdot \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

(здесь $Sp(A)$ – *след матрицы* – сумма ее диагональных элементов).

$$\begin{aligned} 3. \quad n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad P_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= \det(A) - (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \cdot \lambda + Sp(A) \cdot \lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

(здесь A_{kk} , $k = 1, 2, 3$ – алгебраические дополнения диагональных элементов матрицы).

Можно показать, что для квадратной матрицы A порядка n характеристический полином имеет степень n , причем старший коэффициент его равен $(-1)^n$, свободный член равен $\det(A)$, а коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1} \cdot Sp(A)$.

Напомним (см. п.3.3 раздела "Математический анализ"), что всякий полином степени $n \geq 1$ может быть разложен на множители:

$$p_0 + p_1\lambda + \dots + p_n\lambda^n \equiv p_n \cdot (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}.$$

Здесь числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – *попарно различные* корни полинома, а натуральные числа k_1, \dots, k_m – их *кратности*. При этом $k_1 + \dots + k_m =$

n , т.е. полное количество корней полинома (с учетом их кратности) равно степени полинома. Далее, по формулам Виета сумма всех корней полинома (с учетом кратности) равна $-\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)$, а произведение равно $(-1)^n \left(\frac{p_0}{p_n}\right)$.

Эти свойства позволяют сформулировать ряд содержательных утверждений о собственных числах матрицы:

1. Каждая квадратная матрица порядка n имеет (с учетом возможной кратности) ровно n собственных чисел.

Замечание. Отметим, что даже у вещественной матрицы собственные числа не обязательно вещественны. Например:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad P_B(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1; \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

2. Сумма всех (с учетом их кратности) собственных чисел матрицы равна ее следу. Произведение же всех собственных чисел матрицы равно ее определителю.

$$\sum_{r=1}^n \lambda_r(A) = Sp(A); \quad \prod_{r=1}^n \lambda_r(A) = \det(A).$$

Следствие. Вырожденность матрицы равносильна наличию у нее нулевого собственного числа.

Остановимся теперь на вопросе о количестве собственных векторов матрицы. Прежде всего отметим, что умножив собственный вектор на *отличное от нуля* число, получим вновь собственный вектор:

$$\begin{aligned} x \neq \theta \wedge Ax = \lambda x \wedge \alpha \neq 0 &\implies \\ \implies \alpha x \neq \theta \wedge A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x). \end{aligned}$$

Поэтому имеет смысл говорить не о количестве собственных векторов матрицы вообще, а лишь о количестве ее *линейно независимых* собственных векторов.

Имеет место следующая важнейшая

Теорема. Собственные векторы матрицы, соответствующие ее *попарно различным* собственным числам, линейно независимы.

Доказательство. Пусть $k \leq n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – попарно различные собственные числа $(n \times n)$ -матрицы A , а $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ – соответствующие им собственные векторы.

Составим уравнение

$$\alpha_1 x^{(1)} + \dots + \alpha_k x^{(k)} = \theta \quad (6.2.3)$$

и покажем, что оно имеет только нулевое решение.

Умножим (6.2.3) слева на матрицу A . По определению собственных векторов получим

$$\alpha_1 \lambda_1 x^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \alpha_k \lambda_k x^{(k)} = \theta. \quad (6.2.4)$$

С другой стороны, умножая обе части (6.2.3) на λ_1 , имеем

$$\alpha_1 \lambda_1 x^{(1)} + \alpha_2 \lambda_1 x^{(2)} + \dots + \alpha_k \lambda_1 x^{(k)} = \theta.$$

Вычитание полученного равенства из (6.2.4) дает

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) x^{(2)} + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) x^{(k)} = \theta. \quad (6.2.5)$$

Количество слагаемых в левой части (6.2.5) уменьшилось по сравнению с (6.2.3) на единицу. Умножая (6.2.5) слева на матрицу A , затем на λ_2 и вычитая из первого произведения второе, уменьшим количество слагаемых в левой части еще на единицу. Повторяя этот прием, придем к равенству

$$\alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) \cdot (\lambda_k - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x^{(k)} = \theta,$$

из которого, учитывая, что $x^{(k)} \neq \theta$, а собственные числа попарно различны, получим, что $\alpha_k = 0$.

Так как порядок собственных векторов в уравнении (6.2.3) произволен, мы показали, на самом деле, что равны нулю все числа α_r ($r = 1, \dots, k$), и линейная независимость собственных векторов, соответствующих попарно различным собственным числам, доказана. ■

Эта теорема имеет важное

Следствие. Если все n собственных чисел $(n \times n)$ -матрицы A попарно различны, то соответствующие им собственные векторы образуют базис в \mathbb{C}^n . Такой базис принято называть *собственным базисом* матрицы A .

Вопрос о существовании собственного базиса в случае наличия кратных корней характеристического полинома (кратных собственных чисел матрицы) оказывается более сложным.

Пример. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Характеристические полиномы у этих матриц совпадают:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = P_B(\lambda).$$

Итак, обе матрицы имеют собственные числа $\lambda = 2$ двойной кратности. Но у матрицы A есть собственный базис (например, стандартный – $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$). А вот у матрицы B есть (с точностью до числового множителя) только один собственный вектор. Действительно, решая систему

$$(B - 2I)x = \theta \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{получим } x = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\gamma \neq 0).$$

Однако еще Григорий Сковорода⁵⁶ сказал: "Слава Создателю, сотворившему все ненужное трудным, а все трудное – ненужным". Наиболее часто встречающийся в приложениях класс *самосопряженных* матриц избавлен от отмеченных сложностей. У таких матриц, как будет показано в п.8.1, всегда есть собственный базис.

Теперь мы можем закончить рассмотрение примера, с которого начинается эта глава:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & -6 \\ 3 & -4 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Собственные числа матрицы A : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Находим соответствующие им собственные векторы, решая однородные системы линейных уравнений $(A - \lambda_r I)x^{(r)} = \theta$, $r = 1, 2$.

$$r = 1; \quad \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x^{(1)} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где γ_1 – произвольное, отличное от нуля число (отметим, что при $\gamma_1 = 1$ мы получаем уже упоминавшийся в п.6.1 собственный вектор).

$$r = 2; \quad \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x^{(2)} = \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 \neq 0.$$

⁵⁶Григорий Саввич СКОВОРОДА (1722-1794) – украинский философ, поэт, педагог, вел жизнь странствующего нищего. Его сочинения распространялись в списках.

Векторы $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ образуют собственный базис матрицы A .

Итак, построен алгоритм решения полной проблемы собственных значений для квадратной матрицы:

1. Вычислить коэффициенты характеристического полинома $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

2. Найти все *попарно различные* корни этого полинома – собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($m \leq n$).

3. Для каждого собственного числа найти все соответствующие ему *линейно независимые* собственные векторы – ненулевые решения однородной линейной системы $(A - \lambda_r I)x^{(r)} = \theta$, $r = 1, \dots, m$.

Серьезное предупреждение. Этот, казалось бы, естественный алгоритм обладает одним убийственным недостатком: не существует численно устойчивых методов его реализации. Поэтому на практике используют другие методы решения полной проблемы собственных значений. Один из таких методов будет рассмотрен в п.8.2.

Отметим еще некоторые свойства собственных векторов и собственных чисел матрицы.

1. Если матрицу умножить на отличное от нуля число, то множество ее собственных векторов не изменится, а собственные числа умножатся на это же число.

Доказательство. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда

$$Ax = \lambda x \iff (\alpha A)x = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x. \quad \blacksquare$$

2. Если матрица A обратима, то собственные векторы матриц A и A^{-1} совпадают, а их собственные числа взаимно обратны.

Доказательство. Из обратимости A следует, что $\det(A) \neq 0$ и, таким образом, все собственные числа отличны от нуля. Далее,

$$Ax = \lambda x \implies x = A^{-1}Ax = A^{-1}(\lambda x) = \lambda(A^{-1}x) \implies A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x. \quad \blacksquare$$

3. Собственные векторы сопряженных квадратных матриц – сопряженные комплексные числа.

Доказательство.

$$P_{A^*}(\bar{\lambda}) = \det(A^* - \bar{\lambda}I) = \det((A - \lambda I)^*) = \overline{\det(A - \lambda I)} = \overline{P_A(\lambda)}.$$

Поэтому, если $P_A(\lambda) = 0$, то $\overline{P_A(\lambda)} = 0$ и $P_{A^*}(\bar{\lambda}) = 0$. ■

Замечание. В отличие от взаимно обратных матриц собственные векторы эрмитово сопряженных матриц, вообще говоря, никак между собой не связаны.

6.3. Подобные матрицы

Определение. Говорят, что $(n \times n)$ -матрица A *подобна* $(n \times n)$ -матрице B , если существует такая *обратимая* $(n \times n)$ -матрица S , что

$$A = S^{-1}BS.$$

Очевидно, что если A подобна B , то и B подобна A , так как

$$A = S^{-1}BS \iff B = SAS^{-1} = (S^{-1})^{-1}BS^{-1}.$$

Поэтому говорят, что матрицы A и B подобны друг другу. Очевидно также, что всякая квадратная матрица подобна самой себе. Далее, если A подобна B и B подобна C , то A подобна C . Действительно,

$$A = S_1^{-1}BS_1 \wedge B = S_2^{-1}CS_2 \implies A = S_1^{-1}S_2^{-1}CS_2S_1 = (S_2S_1)^{-1}C(S_2S_1).$$

Рассмотрим теперь свойства собственных чисел подобных матриц.

Теорема. Характеристические полиномы подобных матриц равны.

Доказательство. Пусть $A = S^{-1}BS$. Тогда с учетом (3.4.1) имеем

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(S^{-1}BS - \lambda I) = \det(S^{-1}BS - \lambda S^{-1}IS) = \\ &= \det(S^{-1}(B - \lambda I)S) = \det(S^{-1}) \cdot \det(B - \lambda I) \cdot \det(S) = \\ &= \det(B - \lambda I) = P_B(\lambda). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Следствие. Собственные числа подобных матриц попарно равны.

Для дальнейшего большое значение имеет следующая

Теорема. Если у матрицы есть собственный базис, то среди подобных ей есть диагональная.

Доказательство. Пусть $s^{(1)}, \dots, s^{(n)}$ – линейно независимые собственные векторы матрицы A ; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа, которым они соответствуют:

$$As^{(r)} = \lambda_r s^{(r)}, \quad r = 1, \dots, n. \quad (6.3.1)$$

Перепишем эту систему равенств в матричной форме

$$AS = S\Lambda, \quad (6.3.2)$$

где $S = [s^{(1)}, \dots, s^{(n)}]$, $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ (обратите внимание на порядок сомножителей в правой части (6.3.2)!).

Так как векторы $s^{(1)}, \dots, s^{(n)}$ образуют базис, матрица S обратима. Домножив (6.3.2) слева на S^{-1} , получим $S^{-1}AS = \Lambda$. ■

Верно и обратное утверждение: если среди матриц, подобных матрице A , есть диагональная, то на ее диагонали стоят собственные числа матрицы A , и у A есть собственный базис.

Доказательство. Пусть $S^{-1}AS = \Lambda$. Домножив это равенство слева на S , получим $AS = S\Lambda$, что в векторной форме переписывается как (6.3.1). Таким образом, λ_r – собственные числа матрицы A , а $s^{(r)}$ – ее собственные векторы.

Осталось заметить, что в силу обратимости матрицы S ее столбцы – собственные векторы матрицы A – образуют базис. ■

Глава 7. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

7.1. Определение и свойства скалярного произведения

Определение. Скалярным произведением векторов $x \in \mathbb{C}^n$ (левый сомножитель) и $y \in \mathbb{C}^n$ (правый сомножитель) называется комплексное число, которое обозначается $\langle x, y \rangle$ и находится по правилу

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n = \sum_{r=1}^n x_r \bar{y}_r. \quad (7.1.1)$$

Скалярное произведение векторов (одностробцовых матриц) можно записать и в терминах матричного умножения:

$$\langle x, y \rangle = y^* x. \quad (7.1.2)$$

Рассмотрим свойства скалярного произведения.

1. *Скалярный квадрат* любого вектора – вещественное неотрицательное число. Более того, он может равняться нулю, *только* если вектор нулевой.

$$\langle x, x \rangle \geq 0; \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta.$$

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{r=1}^n x_r \bar{x}_r = \sum_{r=1}^n |x_r|^2 \geq 0.$$

Далее, скалярный квадрат нулевого вектора равен, очевидно, нулю. С другой стороны, если сумма неотрицательных чисел – квадратов модулей координат вектора – равна нулю, то все координаты равны нулю, т.е. вектор – нулевой. ■

2. При изменении порядка сомножителей скалярное произведение векторов заменяется на сопряженное комплексное число.

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

Доказательство.

$$\langle y, x \rangle = y_1 \bar{x}_1 + \dots + y_n \bar{x}_n = \overline{\bar{y}_1 x_1 + \dots + \bar{y}_n x_n} = \overline{x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n} = \overline{\langle x, y \rangle}. \quad \blacksquare$$

3. Скалярное произведение линейно относительно *левого* сомножителя.

$$\langle (x + y), z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle; \quad \alpha \in \mathbb{C} \implies \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доказательство. Вычисление по определению. ■

Замечания. 1. Относительно правого сомножителя скалярное произведение линейным *не является*. Действительно, из свойств **2** и **3** следует

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle y, x \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

2. В \mathbb{R}^n скалярное произведение вводится также по формуле (7.1.1), но знак комплексного сопряжения становится излишним.

3. В конечномерных линейных пространствах, отличных от \mathbb{C}^n и \mathbb{R}^n , можно ввести скалярное произведение, сопоставив каждой упорядоченной паре векторов x, y ("природа" которых не играет роли) число, обозначаемое $\langle x, y \rangle$. Свобода "назначения" этого числа ограничена следующими *аксиомами скалярного произведения*, которые были проверены выше для \mathbb{C}^n .

$$1. \langle x, x \rangle \geq 0; \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta.$$

$$2. \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

$$3. \langle (x + y), z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle; \quad \alpha \in \mathbb{C} \implies \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Убедившись в выполнении этих аксиом, можно использовать все результаты построенной теории. Пример скалярного произведения в пространстве полиномов \mathbb{F}^n будет рассмотрен в п.11.3.

4. Комплексное линейное пространство со скалярным произведением называется *унитарным* пространством, вещественное – *евклидовым*.

Докажем еще два важных свойства скалярного произведения.

4. Если $x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^m$ и A – $(m \times n)$ -матрица, то

$$\langle x, A^* y \rangle = \langle Ax, y \rangle.$$

Доказательство. Используя (7.1.2), получаем

$$\langle x, A^* y \rangle = (A^* y)^* x = y^* A^{**} x = y^* Ax = \langle Ax, y \rangle. \quad \blacksquare$$

5. Для любых двух векторов $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

Свойство **5** именуется *неравенством Коши–Буняковского–Шварца*⁵⁷ (КБШ).

Доказательство. Если $y = \theta$, то $|\langle x, \theta \rangle|^2 = 0 = \langle x, x \rangle \cdot \langle \theta, \theta \rangle$.

Если $y \neq \theta$, то обозначим для краткости $\langle y, y \rangle = \beta > 0$, $\langle x, y \rangle = \gamma$ и распишем скалярный квадрат вектора, используя свойства **2** и **3**:

$$\begin{aligned} \langle \beta x - \gamma y, \beta x - \gamma y \rangle &= \beta^2 \langle x, x \rangle - \beta \bar{\gamma} \langle x, y \rangle - \gamma \bar{\beta} \langle y, x \rangle + \gamma \bar{\gamma} \langle y, y \rangle = \\ &= \beta^2 \langle x, x \rangle - \beta \bar{\gamma} \gamma - \gamma \beta \bar{\gamma} + \gamma \bar{\gamma} \beta = \beta(\beta \langle x, x \rangle - \gamma \bar{\gamma}) = \\ &= \beta(\langle y, y \rangle \cdot \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2). \end{aligned}$$

В силу свойства **1** это выражение неотрицательно. Деля его на *положительное* число β , получаем доказываемое неравенство. ■

Как известно из школьного курса, скалярное произведение векторов в \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3) равно произведению длин соответствующих им направленных отрезков и косинуса угла между этими отрезками:

$$\langle x, y \rangle = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}).$$

При этом неравенство КБШ становится тривиальным. Действительно, если x и y – ненулевые векторы, то

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \cdot \cos^2(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \leq |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 &\Leftrightarrow \cos^2(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \leq 1. \end{aligned}$$

7.2. Норма вектора

Известно, что в \mathbb{R}^3 $\langle x, x \rangle = |\vec{x}|^2$ или $|\vec{x}| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, т.е. длина направленного отрезка равна корню квадратному из скалярного квадрата соответствующего вектора. Поскольку скалярный квадрат неотрицателен и для векторов из \mathbb{C}^n , можно ввести в \mathbb{C}^n *норму вектора* – обобщение понятия длины направленного отрезка.

Определение. *Нормой вектора* называется число, которое обозначается $\|x\|$ и находится по правилу

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

⁵⁷Виктор Яковлевич БУНЯКОВСКИЙ (1804-1889) – русский математик, член Петербургской АН.

Карл Герман Амантус ШВАРЦ (К.Н.А. Schwarz, 1843-1921) – немецкий математик, член Берлинской АН и Петербургской АН.

Используя понятие нормы, можно записать неравенство КБШ в виде

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Рассмотрим свойства нормы.

1. Норма любого вектора – вещественное неотрицательное число. Более того, она может равняться нулю, *только* если вектор нулевой.

$$\|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \iff x = \theta.$$

Доказательство. Следует из свойства **1** скалярного произведения. ■

2. Если $\alpha \in \mathbb{C}$, то

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Перед тем, как доказывать это утверждение, отметим, что часто удобнее работать не с нормой, а с ее квадратом.

Доказательство. $\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2.$ ■

Определение. Вектор, норма которого равна единице, называется *нормированным*.

Любой *ненулевой* вектор можно нормировать, разделив его на его собственную норму:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1.$$

3. Для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Доказательство. В силу аксиом скалярного произведения

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Учтем теперь, что модуль суммы двух чисел не превышает суммы модулей слагаемых. При этом у заведомо неотрицательных чисел знак модуля опустим.

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2.$$

По неравенству КБШ $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, откуда

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \blacksquare$$

Для случая \mathbb{R}^3 свойство **3** хорошо известно: длина стороны треугольника не больше суммы длин остальных его сторон. По этой причине доказанное для произвольного унитарного пространства неравенство называют *неравенством треугольника*.

Замечания. 1. Введенная нами норма вектора называется обычно *евклидовой нормой* или *нормой, порожденной скалярным произведением*.

В \mathbb{C}^n можно задать другие неотрицательные функционалы, обладающие свойствами **1** – **3** евклидовой нормы. Все они также называются нормами. Кроме евклидовой, обозначаемой $\|x\|_2$, чаще всего используются следующие две нормы:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|; \quad \|x\|_\infty = \max_{r=1, \dots, n} |x_r|.$$

Проверьте выполнение свойств **1** – **3** для норм $\|x\|_1$ и $\|x\|_\infty$.

2. Как и скалярное произведение норма может быть введена в произвольном линейном пространстве: каждому вектору ставится в соответствие неотрицательное вещественное число – норма этого вектора. "Свобода назначения" нормы ограничивается лишь обязательностью выполнения свойств **1** – **3**, которые для евклидовой нормы в \mathbb{C}^n были доказаны, а теперь выступают в роли *аксиом нормы*. После проверки выполнения аксиом могут использоваться все выводы построенной теории.

7.3. Матрица Грама

Пусть A – произвольная $(m \times n)$ -матрица. Рассмотрим квадратную матрицу порядка n $G_A = A^*A$. По определению произведения матриц

$$(g_A)_{km} = \sum_{r=1}^n a_{kr}^* a_{rm} = \sum_{r=1}^n a_{rm} \overline{a_{rk}}.$$

Если обозначить, как принято, k -й столбец матрицы A $a^{(k)} \in \mathbb{C}^m$, то элементы матрицы G_A можно записать в терминах скалярного произведения:

$$(g_A)_{km} = \langle a^{(m)}, a^{(k)} \rangle.$$

Таким образом, матрица G_A содержит все попарные скалярные произведения векторов – столбцов матрицы A .

Эта матрица называется *матрицей Грама*⁵⁸ упорядоченного набора векторов $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$.

⁵⁸Йорген Педерсен ГРАМ (J.P. Gram, 1850-1916) – датский математик.

Рассмотрим свойства матрицы Грама.

1. Матрица Грама для любого набора векторов – самосопряженная.

Доказательство. $G_A^* = (A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A = G_A$. ■

2. Линейная зависимость набора векторов равносильна вырожденности его матрицы Грама.

Доказательство. Пусть набор векторов $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ линейно зависим. Тогда имеет ненулевое решение однородное матричное уравнение $Ax = \theta_m$. Умножив это уравнение слева на A^* , получим $A^*Ax = A^*\theta_m$ или $G_Ax = \theta_n$, – однородное уравнение с ненулевым решением. Следовательно, G_A – вырожденная.

Пусть теперь дано, что $\det(G_A) = 0$. Тогда однородное уравнение $G_Ax = \theta_n$ будет иметь ненулевое решение. Обозначим его \tilde{x} и умножим равенство $G_A\tilde{x} = \theta_n$ скалярно на \tilde{x} . Используя свойства **4** и **1** скалярного произведения, получим

$$\langle G_A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle = 0 \iff \langle A^*A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle = 0 \iff \langle A\tilde{x}, A\tilde{x} \rangle = 0 \iff A\tilde{x} = \theta.$$

Мы получили однородную систему с ненулевым решением, что и доказывает линейную зависимость столбцов матрицы A . ■

7.4. Ортогональность векторов

Определение. Векторы $x, y \in \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n)$ называются *ортогональными*, если $\langle x, y \rangle = 0$. Множество векторов называется ортогональным, если все его векторы попарно ортогональны.

Замечание. В \mathbb{R}^3 ортогональным *ненулевым* векторам соответствуют перпендикулярные направленные отрезки.

Рассмотрим некоторые свойства ортогональных векторов.

1. Нулевой вектор ортогонален любому вектору: $\langle x, \theta \rangle = 0$.

Доказательство. Вычисление по определению. ■

2. Матрица Грама ортогонального набора векторов $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ диагональна:

$$G_A = \text{diag} [\|a^{(1)}\|^2, \dots, \|a^{(k)}\|^2].$$

Доказательство. $(g_A)_{jm} = \langle a^{(m)}, a^{(j)} \rangle = \delta_{jm} \cdot \|a^{(j)}\|^2$. ■

3. Если ортогональный набор векторов линейно зависим, то он содержит нулевой вектор.

Доказательство. Определитель диагональной матрицы Грама равен произведению ее диагональных элементов – квадратов норм векторов нашего набора. Но по свойству **2** матрицы Грама этот определитель для линейно зависимого набора векторов равен нулю. Следовательно, квадрат нормы хотя бы одного из векторов набора равен нулю. ■

Следующее свойство столь важно, что ему придается ранг теоремы.

Теорема. Любое ортогональное множество векторов в \mathbb{C}^n , не содержащее нулевого вектора, можно дополнить до ортогонального базиса.

Доказательство. Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ – ортогональный и не содержащий нулевого вектора набор векторов. Если $k = n$, то этот набор уже является базисом. Если же $k < n$, то построим еще один ненулевой вектор, ортогональный уже имеющемуся набору.

Записывая условия ортогональности искомого вектора всем векторам набора, получим систему уравнений

$$\langle x, a^{(1)} \rangle = 0, \dots, \langle x, a^{(k)} \rangle = 0,$$

или, в матричном виде, $A^*x = \theta_k$, где $A = [a^{(1)}, \dots, a^{(k)}]$.

Матрица A^* имеет размер $k \times n$, и в силу $k < n$ эта система имеет ненулевое решение. Обозначив его $a^{(k+1)}$, получаем ортогональный (по построению) набор из $k + 1$ векторов, не содержащий нулевого вектора. Повторяя эту операцию, получим ортогональный базис \mathbb{C}^n . ■

Замечание. Разложение вектора b в \mathbb{C}^n по базису $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ сводится, как известно, к решению системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей коэффициентов

$$x_1 a^{(1)} + \dots + x_n a^{(n)} = b \iff Ax = b. \quad (7.4.1)$$

Умножив в случае ортогонального базиса обе части матричного уравнения (7.4.1) на A^* слева, получим равносильную систему

$$G_A x = A^* b.$$

Поскольку матрица G_A диагональна, решение этой системы имеет вид

$$x_k = \frac{a^{(k)*} b}{\|a^{(k)}\|^2} = \frac{\langle b, a^{(k)} \rangle}{\|a^{(k)}\|^2}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и требует выполнения существенно меньшего ($\approx 2n^2$) количества арифметических операций, чем в общем случае ($\approx \frac{n^3}{3}$).

7.5. Унитарная матрица

Определение. Ортогональный набор нормированных векторов называется *ортонормированным*.

Определение. Квадратная матрица, столбцы которой образуют ортонормированный набор, называется *унитарной*. *Вещественная* унитарная матрица называется *ортогональной*.

Пример. Рассмотрим матрицу второго порядка

$$U_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\|u_\varphi^{(1)}\| = \|u_\varphi^{(2)}\| = 1$, $\langle u_\varphi^{(1)}, u_\varphi^{(2)} \rangle = 0$. Следовательно, эта матрица ортогональна.

Пусть x – ненулевой вектор в \mathbb{R}^2 , а $y = U_\varphi x$. Легко видеть, что направленный отрезок \vec{y} получается из \vec{x} поворотом на угол φ против часовой стрелки (рис.7.1). Поэтому матрицу U_φ называют *матрицей поворота*. В частности, $U_0 = I$ – матрица поворота на нулевой угол, $U_\pi = -I$ (поворот на угол π – это центральная симметрия).

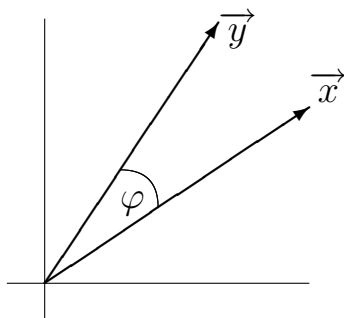


Рис.7.1

Рассмотрим свойства унитарных матриц.

1. Унитарность матрицы U равносильна тому, что $U^*U = I$.

Доказательство. Следует из определения матрицы Грама. ■

2. Умножение векторов из \mathbb{C}^n на унитарную матрицу не меняет их скалярных произведений и норм.

Доказательство. $\langle Ux, Uy \rangle = \langle U^*Ux, y \rangle = \langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle$. В частности, $\langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle$, т.е. $\|Ux\| = \|x\|$. ■

3. Если U – унитарная матрица, то и U^* – унитарная матрица.

Доказательство. Из $U^*U = I$ следует, что матрицы U^* и U взаимно обратны, а тогда $(U^*)^*U^* = UU^{-1} = I$. ■

4. Если V – унитарная матрица того же порядка, что U , то их произведение – унитарная матрица.

Доказательство. $(UV)^*(UV) = V^*(U^*U)V = V^*V = I$. ■

Пример. Покажите, что $U_\varphi U_\psi = U_{\varphi+\psi}$; $U_\varphi^{-1} = U_{-\varphi}$.

5. Модули всех собственных чисел унитарной матрицы равны единице: $|\lambda(U)| = 1$.

Доказательство. Пусть x – собственный вектор матрицы U , соответствующий собственному числу λ . Тогда по свойству **2**

$$Ux = \lambda x \implies \|Ux\| = |\lambda| \cdot \|x\| \implies \|x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \implies |\lambda| = 1.$$

Поскольку определитель матрицы равен произведению ее собственных чисел, отсюда, в частности, следует, что $|\det(U)| = 1$. ■

Пример. Покажите, что собственные числа матрицы U_φ равны $\exp(i\varphi)$ и $\exp(-i\varphi)$.

6. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам унитарной матрицы, ортогональны.

Доказательство. Если $Ux = \lambda x$, $Uy = \mu y$, то по свойству **2**

$$\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle = \langle \lambda x, \mu y \rangle = \lambda \bar{\mu} \langle x, y \rangle \implies (1 - \lambda \bar{\mu}) \langle x, y \rangle = 0. \quad (7.5.1)$$

Но по свойству **5** $|\mu| = 1$, т.е. $\bar{\mu} = \frac{1}{\mu}$. По условию $\lambda \neq \mu$. Отсюда $\lambda \bar{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1$, и из (7.5.1) вытекает $\langle x, y \rangle = 0$. ■

Пример. Найдите собственные векторы матрицы U_φ в \mathbb{C}^2 и проверьте их ортогональность.

Обратите внимание на то, что при $\varphi \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) матрица U_φ не имеет собственных векторов в \mathbb{R}^2 . Дайте этому факту геометрическую интерпретацию.

7.6. Площадь параллелограмма и объем параллелепипеда

Свойство **2** унитарных матриц имеет в \mathbb{R}^3 важную геометрическую интерпретацию: если x, y, z – три линейно независимых вектора (соответствующие им направленные отрезки $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ некопланарны), и $x' = Ux$, $y' = Uy$, $z' = Uz$, где U – ортогональная матрица, то длины отрезков $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$ и углы между ними те же, что у тройки $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Докажем, что справедливо и обратное утверждение: если длины отрезков и углы между ними одинаковы для некопланарных троек $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ и $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$, то

$$[x' y' z'] = U \cdot [x y z],$$

где U – ортогональная матрица.

Действительно, из условия следует равенство скалярных произведений соответствующих пар векторов

$$\begin{aligned} \langle x', x' \rangle &= \langle x, x \rangle; & \langle y', y' \rangle &= \langle y, y \rangle; & \langle z', z' \rangle &= \langle z, z \rangle; \\ \langle x', y' \rangle &= \langle x, y \rangle; & \langle x', z' \rangle &= \langle x, z \rangle; & \langle y', z' \rangle &= \langle y, z \rangle, \end{aligned}$$

т.е.

$$[x' y' z']^* \cdot [x' y' z'] = [x y z]^* \cdot [x y z]. \quad (7.6.1)$$

Обозначим $U = [x' y' z'] \cdot [x y z]^{-1}$ (матрица $[x y z]$ обратима, так как тройка $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ некопланарна и, следовательно, векторы x, y, z линейно независимы). Домножив равенство (7.6.1) справа на $[x y z]^{-1}$, а слева на $([x y z]^*)^{-1}$, получим $U^*U = I$. ■

Замечание. Аналогичное утверждение верно для неколлинеарных пар направленных отрезков в \mathbb{R}^2 .

Пример. Поворот на угол φ вокруг оси x_3 в \mathbb{R}^3 , очевидно, сохраняет длины отрезков и углы между ними. Направленные отрезки $\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)}$ – *орты* – переходят при этом повороте соответственно в отрезки $\vec{g}^{(1)}, \vec{g}^{(2)}, \vec{g}^{(3)}$, где

$$g^{(1)} = [\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0]^T, \quad g^{(2)} = [-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0]^T, \quad g^{(3)} = e^{(3)}.$$

Поэтому матрица

$$V_\varphi = [g^{(1)} g^{(2)} g^{(3)}] \cdot [e^{(1)} e^{(2)} e^{(3)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ортогональна (проверьте это по определению). Ее называют матрицей поворота в плоскости x_1Ox_2 (или матрицей плоского вращения).

Получим теперь формулы для вычисления площади параллелограмма и объема параллелепипеда.

1. Пусть параллелограмм в \mathbb{R}^2 построен на направленных отрезках \vec{x} и \vec{y} . Покажем, что его площадь равна $|\det[x y]|$.

Рассмотрим сначала параллелограмм, изображенный на рис.7.2 (одна сторона лежит на оси абсцисс).

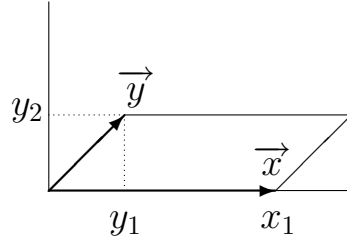


Рис.7.2

Очевидно, что

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad S = |y_2| \cdot |x_1| = \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \right| = |\det[x \ y]|.$$

Пусть теперь неколлинеарные отрезки \vec{x} , \vec{y} расположены произвольно. Для вычисления площади построенного на них параллелограмма рассмотрим конгруэнтный параллелограмм, одна из сторон которого лежит на оси абсцисс (рис.7.3).

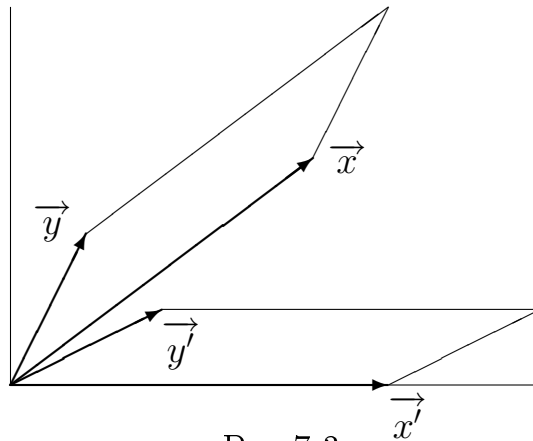


Рис.7.3

Мы доказали существование такой ортогональной матрицы U , что $x' = Ux$, $y' = Uy$. Поэтому

$$S = |\det[x' \ y']| = |\det(U \cdot [x \ y])| = \det(U) \cdot |\det[x \ y]| = |\det[x \ y]|. \quad (7.6.2)$$

Легко видеть, что формула (7.6.2) верна и в случае коллинеарных отрезков, когда площадь равна нулю.

2. Пусть параллелепипед в \mathbb{R}^3 построен на направленных отрезках \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} . Покажем, что его объем равен $|\det[x \ y \ z]|$.

Рассмотрим сначала параллелепипед, изображенный на рис.7.4 (одна грань лежит в координатной плоскости):

$$x = [x_1, x_2, 0]^T, \quad y = [y_1, y_2, 0]^T, \quad z = [z_1, z_2, z_3]^T.$$

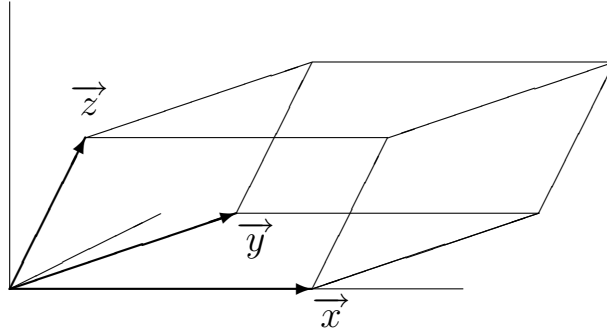


Рис.7.4

Объем параллелепипеда равен произведению высоты на площадь основания:

$$V = |z_3| \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{bmatrix} \right| = |\det[x \ y \ z]|.$$

Пусть теперь некопланарные отрезки \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} расположены произвольно. Для вычисления объема построенного на них параллелепипеда рассмотрим конгруэнтный параллелепипед с гранью, лежащей в координатной плоскости.

Мы доказали существование такой ортогональной матрицы U , что $x' = Ux$, $y' = Uy$, $z' = Uz$. Поэтому

$$\begin{aligned} V &= |\det[x' \ y' \ z']| = |\det(U \cdot [x \ y \ z])| = \\ &= |\det(U)| \cdot |\det[x \ y \ z]| = |\det[x \ y \ z]|. \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

Убедитесь, что формула (7.6.3) верна и в случае компланарных отрезков, когда объем равен нулю.

3. Вычислим, наконец, площадь параллелограмма в \mathbb{R}^3 для случая, когда он не лежит в координатной плоскости. Пусть этот параллелограмм построен на неколлинеарных отрезках \vec{x} и \vec{y} .

Построим третий отрезок \vec{w} , перпендикулярный \vec{x} и \vec{y} . Координаты вектора w удовлетворяют условиям ортогональности

$$\begin{cases} x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = 0 \\ y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 = 0 \end{cases}.$$

Одно из ненулевых решений этой системы $w = [\Delta_{23}, -\Delta_{13}, \Delta_{12}]^T$, где

$$\Delta_{12} = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_{23} = \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta_{13} = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Действительно,

$$\langle x, w \rangle = x_1 \Delta_{23} - x_2 \Delta_{13} + x_3 \Delta_{12} = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Аналогично,

$$\langle y, w \rangle = \det \begin{bmatrix} y_1 & x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 & y_2 \\ y_3 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Кроме того, $w \neq \theta$ в силу линейной независимости векторов x и y .

Нормируем вектор w :

$$z = \frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{(\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} \Delta_{23} \\ -\Delta_{13} \\ \Delta_{12} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что объем параллелепипеда с *единичной* высотой, построенного на направленных отрезках \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , численно равен площади его основания – параллелограмма, построенного на направленных отрезках \vec{x} и \vec{y} :

$$\begin{aligned} S = V &= |\det[x \ y \ z]| = \frac{1}{\|w\|} \cdot |\det[x \ y \ w]| = \\ &= \frac{1}{(\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2)^{1/2}} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \Delta_{23} \\ x_2 & y_2 & -\Delta_{13} \\ x_3 & y_3 & \Delta_{12} \end{bmatrix} \right| = \\ &= \frac{\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2}{(\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2)^{1/2}} = (\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{13}^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

Убедитесь, что в случае, когда отрезки \vec{x} и \vec{y} лежат в координатной плоскости, формула (7.6.4) превращается в (7.6.2).

Терминологическое замечание. В "векторной алгебре т.е. в алгебре направленных отрезков, отрезок \vec{w} , соответствующий вектору $w = [\Delta_{23}, -\Delta_{13}, \Delta_{12}]^T$ называют *векторным произведением* отрезков \vec{x} и \vec{y} . Отметим свойства векторного произведения:

1. $\vec{w} \perp \vec{x}$, $\vec{w} \perp \vec{y}$.
2. Площадь параллелограмма, построенного на \vec{x} и \vec{y} , равна $|\vec{w}|$.
3. Направленные отрезки \vec{x} , \vec{y} , \vec{w} образуют правую тройку. В этом можно убедиться, положив $x = e^{(1)}$, $y = e^{(2)}$. Тогда $w = e^{(3)}$.

Число $\det[x \ y \ z]$ называют *смешанным* (векторно-скалярным) произведением направленных отрезков \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} .

Так как $\det[e^{(1)} e^{(2)} e^{(3)}] = 1$, смешанное произведение положительно, если сомножители образуют правую тройку, и отрицательно, если левую.

7.7. Алгоритм Грама–Шмидта. QR-разложение матрицы

В заключение этой главы рассмотрим алгоритм Грама–Шмидта⁵⁹, который позволяет, имея *линейно независимый* набор из k векторов в \mathbb{C}^n ($k \leq n$), построить *ортонормированный* набор из k векторов.

Итак, пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ – линейно независимые векторы. Положим $b^{(1)} = a^{(1)}$ и $b^{(2)} = a^{(2)} - \alpha_{12}b^{(1)}$.

Число α_{12} выберем так, чтобы $\langle b^{(2)}, b^{(1)} \rangle = 0$, т.е. чтобы $b^{(2)}$ и $b^{(1)}$ были ортогональны:

$$\langle b^{(2)}, b^{(1)} \rangle = \langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle - \alpha_{12} \langle b^{(1)}, b^{(1)} \rangle = 0 \iff \alpha_{12} = \frac{\langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle}{\langle b^{(1)}, b^{(1)} \rangle}.$$

Далее, если уже построены попарно ортогональные векторы $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$, и $m < k$, то положим

$$b^{(m+1)} = a^{(m+1)} - \alpha_{1,m+1}b^{(1)} - \dots - \alpha_{m,m+1}b^{(m)}. \quad (7.7.1)$$

Умножая (7.7.1) скалярно на $b^{(r)}$, $1 \leq r \leq m$, получим уравнение

$$\langle b^{(m+1)}, b^{(r)} \rangle = \langle a^{(m+1)}, b^{(r)} \rangle - \alpha_{r,m+1} \langle b^{(r)}, b^{(r)} \rangle = 0$$

(остальные слагаемые исчезнут вследствие попарной ортогональности уже построенных векторов). Отсюда $\alpha_{r,m+1} = \langle a^{(m+1)}, b^{(r)} \rangle / \langle b^{(r)}, b^{(r)} \rangle$.

Осталось показать, что среди построенных *ортонормальных* векторов $b^{(1)}, \dots, b^{(k)}$ нет нулевого. Предположим, напротив, что $b^{(1)} \neq \theta, \dots, b^{(m)} \neq \theta$, но $b^{(m+1)} = \theta$. Подставив в равенство

$$\theta = a^{(m+1)} - \alpha_{1,m+1}b^{(1)} - \dots - \alpha_{m,m+1}b^{(m)}$$

выражения векторов $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$ через векторы $a^{(1)}, \dots, a^{(m)}$, получим

$$\theta = a^{(m+1)} + \gamma_1 a^{(1)} + \dots + \gamma_m a^{(m)},$$

где γ_r , $r = 1, \dots, m$ – некоторые числа.

Поскольку коэффициент при $a^{(m+1)}$ отличен от нуля, полученное равенство противоречит линейной независимости исходного набора векторов. Таким образом, среди построенных векторов нулевых нет. Нормировав эти векторы, мы закончим работу алгоритма Грама–Шмидта.

⁵⁹Эрхард ШМИДТ (E. Schmidt, 1876-1959) – немецкий математик.

Перепишем равенство (7.7.1) в виде

$$a^{(m+1)} = \alpha_{1,m+1}b^{(1)} + \dots + \alpha_{m,m+1}b^{(m)} + b^{(m+1)}; \quad m = 1, \dots, k-1. \quad (7.7.2)$$

и объединим наборы векторов в матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a^{(1)} & \dots & a^{(k)} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b^{(1)} & \dots & b^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Из формулы (7.7.2) видно, что $(m+1)$ -й столбец матрицы A может быть получен из матрицы B умножением справа на столбец $[\alpha_{1,m+1}, \dots, \alpha_{m,m+1}, 1, 0, \dots, 0]^T$, и, следовательно, вся матрица A получается умножением матрицы B справа на верхнюю треугольную матрицу с единичной диагональю:

$$A = B\alpha, \quad (7.7.3)$$

где

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Нормирование построенных векторов можно осуществить с помощью умножения справа на матрицу D^{-1} , где $D = \text{diag} [\|b^{(1)}\|, \dots, \|b^{(k)}\|]$. Тогда (7.7.3) перейдет в $A = B(D^{-1}D)\alpha = QR$, где $Q = BD^{-1}$ – матрица с ортонормированными столбцами, $R = D\alpha$ – верхняя треугольная матрица.

Представление $(n \times k)$ -матрицы A с линейно независимыми столбцами в виде произведения $(n \times k)$ -матрицы Q с ортонормированными столбцами и верхней треугольной $(k \times k)$ -матрицы R называется *QR-разложением* матрицы A .

В частности, если A – квадратная невырожденная матрица, то Q – унитарная матрица.

Серьезное предупреждение. Необходимо отметить, что изложенный выше алгоритм, с помощью которого была доказана возможность получения QR -разложения, численно неустойчив и не может быть использован для вычислений. Численно устойчивые алгоритмы, выполняющие QR -разложение, реализованы в средах конечного пользователя и в виде стандартных программ на Фортране.

Глава 8. САМОСОПРЯЖЕННАЯ МАТРИЦА

8.1. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженной матрицы

Напомним, что квадратная матрица A называется самосопряженной (эрмитовой), если $A^* = A$.

Изучим свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженной матрицы.

1. Собственные числа самосопряженной матрицы вещественны.

Доказательство. Для начала отметим, что условие $A^* = A$ и свойство **4** скалярного произведения дают

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^*x \rangle = \langle x, Ax \rangle. \quad (8.1.1)$$

Пусть теперь $A^* = A$, $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$. Тогда из (8.1.1) имеем

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Сокращая на $\langle x, x \rangle \neq 0$, получим $\lambda = \bar{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

2. Собственные векторы самосопряженной матрицы, соответствующие попарно различным собственным числам, ортогональны.

Доказательство. Пусть $A^* = A$, $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Тогда из (8.1.1) с учетом $\mu \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle &\implies \\ \implies (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Но $\lambda \neq \mu$ и, следовательно, $\langle x, y \rangle = 0$. ■

Замечания. 1. Напомним, что в случае произвольной квадратной матрицы попарное различие собственных чисел обеспечивает лишь линейную независимость соответствующих собственных векторов.

2. Сравните доказанные свойства самосопряженной матрицы со свойствами **6** и **7** унитарных матриц.

Важнейшее свойство самосопряженной матрицы устанавливает

Теорема. Для любой самосопряженной матрицы существует ортонормированный базис, состоящий из ее собственных векторов.

Доказательство проведем индукцией по порядку матрицы A .

Для матрицы порядка 1 утверждение теоремы очевидно. Пусть оно доказано для матриц порядка $k - 1$. Рассмотрим произвольную эрмитову матрицу A порядка k и найдем какой-нибудь корень λ_1 ее характеристического полинома $P_A(\lambda)$. Пусть $s^{(1)}$ – нормированный собственный вектор, соответствующий λ_1 .

Дополним "набор состоящий из одного вектора $s^{(1)}$, до ортонормированного базиса в \mathbb{C}^k векторами $g^{(2)}, \dots, g^{(k)}$. Собственные векторы $s^{(2)}, \dots, s^{(k)}$ будем искать в виде

$$s^{(r)} = \alpha_2^{(r)} g^{(2)} + \dots + \alpha_k^{(r)} g^{(k)} \quad \text{или} \quad s^{(r)} = D\alpha^{(r)},$$

где $D = [s^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(k)}]$, $\alpha^{(r)} = [0, \alpha_2^{(r)}, \dots, \alpha_k^{(r)}]^T$. Отметим, что матрица D унитарна по построению, и потому $D^* = D^{-1}$.

По определению собственного вектора

$$As^{(r)} = \lambda_r s^{(r)} \quad \text{или} \quad AD\alpha^{(r)} = \lambda_r D\alpha^{(r)},$$

откуда

$$D^*AD\alpha^{(r)} = \lambda_r \alpha^{(r)}. \quad (8.1.2)$$

Матрица AD имеет вид

$$AD = [As^{(1)}, Ag^{(2)}, \dots, Ag^{(k)}] = [\lambda_1 s^{(1)}, Ag^{(2)}, \dots, Ag^{(k)}]. \quad (8.1.3)$$

Поскольку матрица D^*AD эрмитова (проверьте это!), ее можно записать в виде

$$D^*AD = \left[\begin{array}{c|cc} c & d^* & \\ \hline d & & B \end{array} \right],$$

где B – эрмитова матрица порядка $k - 1$, c – матрица первого порядка (число), d – столбец высоты $k - 1$. При этом из (8.1.3) следует

$$c = \langle \lambda_1 s^{(1)}, s^{(1)} \rangle = \lambda_1; \quad d_r = \langle Ag^{(r)}, s^{(1)} \rangle = \langle g^{(r)}, As^{(1)} \rangle = \lambda_1 \langle g^{(r)}, s^{(1)} \rangle = 0,$$

так как $g^{(r)}$ ортогональны $s^{(1)}$ по построению. Итак,

$$D^*AD = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & & \\ 0 & & & B \end{array} \right].$$

Поскольку $D^* = D^{-1}$, матрицы D^*AD и A подобны, и их характеристические полиномы совпадают:

$$P_A(\lambda) = P_{D^*AD}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot P_B(\lambda).$$

Поэтому собственные числа матрицы B являются также собственными числами матрицы A . Верно и обратное (за исключением, может быть, числа λ_1).

Система уравнений (8.1.2) для определения собственных чисел λ_r и векторов $\alpha^{(r)}$ имеет вид

$$D^*AD\alpha^{(r)} = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2^{(r)} \\ \dots \\ \alpha_k^{(r)} \end{bmatrix} = \lambda_r \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2^{(r)} \\ \dots \\ \alpha_k^{(r)} \end{bmatrix}.$$

Она, очевидно, равносильна системе

$$B \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2^{(r)} \\ \dots \\ \alpha_k^{(r)} \end{bmatrix} = \lambda_r \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2^{(r)} \\ \dots \\ \alpha_k^{(r)} \end{bmatrix}.$$

По индукционному предположению матрица B имеет ортонормированный собственный базис в \mathbb{C}^{k-1} . Обозначим его векторы $a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$ и положим

$$\alpha^{(r)} = \begin{bmatrix} 0 \\ a^{(r)} \end{bmatrix}, \quad r = 2, \dots, k.$$

Из $Ba^{(r)} = \lambda_r a^{(r)}$ имеем $D^*AD\alpha^{(r)} = \lambda_r \alpha^{(r)}$. Отсюда следует $A(D\alpha^{(r)}) = \lambda_r (D\alpha^{(r)})$, т.е. $As^{(r)} = \lambda_r s^{(r)}$.

Но $a^{(r)}$ ортонормированы, следовательно, и $\alpha^{(r)}$ ортонормированы. Поскольку умножение на унитарную матрицу D сохраняет скалярное произведение и норму, векторы $s^{(2)}, \dots, s^{(k)}$ также ортонормированы. Нормированный вектор $s^{(1)}$ ортогонален векторам $g^{(2)}, \dots, g^{(k)}$ и, следовательно, ортогонален векторам $s^{(2)}, \dots, s^{(k)}$. Ортонормированный собственный базис матрицы A построен, и теорема доказана. ■

Следствие. Всякая эрмитова матрица A подобна диагональной матрице Λ , на диагонали которой стоят собственные числа A .

Матрица S , с помощью которой осуществляется подобие, унитарна, ибо ее столбцы – ортонормированные собственные векторы матрицы A . Говорят, что матрицы A и $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ унитарно подобны.

Домножив равенство $S^{-1}AS = \Lambda$ на S слева и на $S^* = S^{-1}$ справа, получим

$$A = S\Lambda S^*.$$

Такое представление самосопряженной матрицы называется ее *спектральным разложением*.

Пример. $A = \begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix}$. Легко видеть, что $A^* = A$. Прямым вычислением получаем

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 3.$$

Корни характеристического полинома $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ — собственные числа матрицы A .

Для нахождения собственного вектора $s^{(1)}$ решим однородную систему $(A - \lambda_1 \cdot I)s^{(1)} = \theta$:

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & i & 1 & 0 \\ -i & -2 & -i & 0 \\ 1 & i & -2 & 0 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|c} 1 & -i/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -3i/2 & 0 \\ 0 & 3i/2 & -3/2 & 0 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

откуда $s^{(1)} = \alpha[1 \ -i \ 1]^T$.

Подберем α из условия $\|s^{(1)}\| = 1$:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad s^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \ -i \ 1]^T.$$

Для нахождения собственного вектора $s^{(2)}$ решим однородную систему $(A - \lambda_2 \cdot I)s^{(2)} = \theta$:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & 0 \\ -i & 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Одно из решений этой системы $s^{(2)} = \beta[1 \ 0 \ -1]^T$. Подберем β из условия $\|s^{(2)}\| = 1$:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad s^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \ 0 \ -1]^T.$$

Третье собственное число равно второму. Следовательно, система для определения $s^{(3)}$ совпадает с системой для определения $s^{(2)}$. Но если $s^{(2)}$ и $s^{(3)}$ ортогональны $s^{(1)}$ "автоматически" (свойство **2** самосопряженной матрицы), то условие ортогональности $s^{(2)}$ и $s^{(3)}$ дает дополнительное уравнение. Итак,

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & 0 \\ -i & 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

откуда $s^{(3)} = \gamma[1 \ 2i \ 1]^T$. Условие нормировки дает $s^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1 \ 2i \ 1]^T$.

Запишем спектральное разложение матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{i}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = SAS^*.$$

8.2. Решение полной проблемы собственных значений для самосопряженной матрицы. Метод Якоби

В п.6.2 было указано, что очевидный алгоритм решения полной проблемы собственных значений, вытекающий из определения собственных чисел и собственных векторов, неприменим из-за его численной неустойчивости. Практическое применение получили методы, основанные на других идеях. Один из них – метод Якоби – рассматривается ниже. Мы ограничимся случаем, когда A – вещественная симметричная матрица.

Если найдется такая ортогональная матрица U , что $\Lambda = U^T A U$ – диагональная матрица, то (см. п.6.3) на диагонали Λ будут стоять собственные числа матрицы A , а столбцы матрицы U образуют собственный базис матрицы A . Будем строить матрицы, унитарно подобные матрице A , добиваясь превращения всех внедиагональных элементов в нули.

На первом шаге алгоритма Якоби мы добьемся того, чтобы *наибольший по модулю внедиагональный элемент* (назовем его ведущим элементом первого шага) обратился в нуль. Вследствие симметрии матрицы таких элементов четное число. Если их больше двух, можно выбрать любую пару a_{ik}, a_{ki} (например, пару с наименьшей суммой $i + k$). Будем называть строки и столбцы с номерами i и k *отмеченными*.

На рисунке схематически изображена исходная матрица $A^{(0)} = A$ с отмеченной парой ведущих элементов первого шага $a_{ik}^{(0)}$ и $a_{ki}^{(0)}$ ($|a_{ik}^{(0)}| = \max_{p \neq m} |a_{pm}^{(0)}|$).

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} \cdots & \vdots & \cdots & a_{ik}^{(0)} & \cdots \\ \cdots & a_{ki}^{(0)} & \cdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Представим результат первого шага – матрицу $A^{(1)}$, унитарно подобную A , – в виде $A^{(1)} = U^{(1)T} A^{(0)} U^{(1)}$, где $U^{(1)}$ – ортогональная матрица, изображенная схематически ниже.

$$U^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \vdots & \mathbb{O} & \vdots & \mathbb{O} \\ \cdots & c_1 & \cdots & -s_1 & \cdots \\ \mathbb{O} & \vdots & \mathbb{I} & \vdots & \mathbb{O} \\ \cdots & s_1 & \cdots & c_1 & \cdots \\ \mathbb{O} & \vdots & \mathbb{O} & \vdots & \mathbb{I} \end{bmatrix}.$$

Здесь символом \mathbb{I} обозначена единичная подматрица, символом \mathbb{O} – нулевая подматрица. Таким образом, матрица $U^{(1)}$ получается из единичной путем замены двух диагональных и двух внедиагональных элементов, стоящих на пересечении отмеченных строк и столбцов:

$$u_{ii}^{(1)} = u_{kk}^{(1)} = c_1 = \cos(\varphi_1); \quad u_{ki}^{(1)} = -u_{ik}^{(1)} = s_1 = \sin(\varphi_1)$$

(φ_1 – угол, подлежащий определению из условия $a_{ik}^{(1)} = a_{ik}^{(0)} = 0$).

По определению умножения матриц из $A^{(1)} = U^{(1)T} A^{(0)} U^{(1)}$ следует

$$a_{pm}^{(1)} = \sum_{r=1}^n u_{pr}^{(1)T} \sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{jm}^{(1)}. \quad (8.2.1)$$

Покажем, что элементы матрицы, *не стоящие в отмеченных строках и столбцах*, не изменяются. Рассмотрим внутреннюю сумму в (8.2.1). Если m -й столбец не отмечен, то эта сумма состоит из одного слагаемого:

$$\sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{jm}^{(1)} = a_{rm}^{(0)} u_{mm}^{(1)} = a_{rm}^{(0)}.$$

Если p -я строка не отмечена, то внешняя сумма тоже состоит из одного слагаемого:

$$a_{pm}^{(1)} = \sum_{r=1}^n u_{pr}^{(1)T} a_{rm}^{(0)} = u_{pp}^{(1)T} a_{pm}^{(0)} = a_{pm}^{(0)}.$$

Вычислим теперь элемент матрицы $A^{(1)}$, стоящий в *отмеченном столбце* и в *неотмеченной строке*. Пусть, например, $m = i$, $p \neq i$, $p \neq k$. Тогда внутренняя сумма содержит два слагаемых:

$$\sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{ji}^{(1)} = a_{ri}^{(0)} u_{ii}^{(1)} + a_{rk}^{(0)} u_{ki}^{(1)} = a_{ri}^{(0)} c_1 + a_{rk}^{(0)} s_1,$$

а внешняя – одно:

$$a_{pi}^{(1)} = u_{pp}^{(1)T} (a_{pi}^{(0)} c_1 + a_{pk}^{(0)} s_1) = a_{pi}^{(0)} c_1 + a_{pk}^{(0)} s_1.$$

Повторяя рассуждения для $m = k$, получим

$$\sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{jk}^{(1)} = a_{rk}^{(0)} u_{kk}^{(1)} + a_{ri}^{(0)} u_{ik}^{(1)} = a_{rk}^{(0)} c_1 - a_{ri}^{(0)} s_1,$$

$$a_{pk}^{(1)} = u_{pp}^{(1)T} (a_{pk}^{(0)} c_1 - a_{pi}^{(0)} s_1) = a_{pk}^{(0)} c_1 - a_{pi}^{(0)} s_1.$$

Заметим, что

$$(a_{pi}^{(1)})^2 + (a_{pk}^{(1)})^2 = (a_{pi}^{(0)})^2 + (a_{pk}^{(0)})^2,$$

т.е. сумма квадратов элементов отмеченных столбцов, стоящих в одной (не отмеченной) строке, не меняется. В силу симметрии матриц не меняется и сумма квадратов элементов отмеченных строк, стоящих в одном (не отмеченном) столбце.

Осталось найти элемент $a_{ik}^{(1)}$, получающийся на месте ведущего элемента первого шага:

$$\begin{aligned} a_{ik}^{(1)} &= \sum_{r=1}^n u_{ir}^{(1)T} \sum_{j=1}^n a_{rj}^{(0)} u_{jk}^{(1)} = \\ &= \sum_{r=1}^n u_{ir}^{(1)T} (a_{ri}^{(0)} u_{ik}^{(1)} + a_{rk}^{(0)} u_{kk}^{(1)}) = \sum_{r=1}^n u_{ir}^{(1)T} (-a_{ri}^{(0)} s_1 + a_{rk}^{(0)} c_1) = \\ &= u_{ii}^{(1)} (-a_{ii}^{(0)} s_1 + a_{ik}^{(0)} c_1) + u_{ik}^{(1)} (-a_{ki}^{(0)} s_1 + a_{kk}^{(0)} c_1) = \\ &= -a_{ii}^{(0)} c_1 s_1 + a_{ik}^{(0)} c_1^2 - a_{ki}^{(0)} s_1^2 + a_{kk}^{(0)} c_1 s_1. \end{aligned}$$

Приравняв полученное выражение нулю и вспоминая, что $c_1 = \cos(\varphi_1)$, а $s_1 = \sin(\varphi_1)$, получим уравнение для определения φ_1 :

$$(\cos^2(\varphi_1) - \sin^2(\varphi_1)) a_{ik}^{(0)} = (a_{ii}^{(0)} - a_{kk}^{(0)}) \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_1)$$

(здесь учтено, что $a_{ik}^{(0)} = a_{ki}^{(0)}$). По условию $a_{ik}^{(0)} \neq 0$ (как наибольший по модулю внедиагональный элемент), и это уравнение приводится к виду

$$\operatorname{ctg}(2\varphi_1) = (a_{ii}^{(0)} - a_{ii}^{(0)}) / 2a_{ik}^{(0)}.$$

Найдя из этого уравнения φ_1 , получим матрицу $A^{(1)}$, которая унитарно подобна матрице $A^{(0)}$ и обладает следующими свойствами:

1. $a_{ik}^{(1)} = a_{ki}^{(1)} = 0$.

2. Сумма квадратов остальных *внедиагональных* элементов не изменилась.

На втором шаге алгоритма Якоби мы сконструируем матрицу $A^{(2)} = U^{(2)*} A^{(1)} U^{(2)}$, унитарно подобную $A^{(1)}$ (а, следовательно, и $A^{(0)}$), у которой будут равны нулю ведущие элементы матрицы $A^{(1)}$.

Вообще, $A^{(p)} = V^{(p)*} A V^{(p)}$, где $V^{(p)} = U^{(1)} \cdot \dots \cdot U^{(p)}$.

Здесь можно было бы поставить слова "и так далее но... к сожалению, на втором шаге те элементы, которые на первом шаге были обнулены, вообще говоря, станут снова отличными от нуля! Поэтому, в отличие, скажем, от алгоритма Гаусса-Йордана, процесс преобразования по алгоритму Якоби, вообще говоря, бесконечен. Однако сейчас мы покажем, что сумма квадратов внедиагональных элементов на каждом шаге алгоритма уменьшается.

Обозначим $Q^{(p)} = \sum_{r \neq m} (a_{rm}^{(p)})^2$. Тогда в силу свойств **1** и **2**

$$Q^{(p+1)} = Q^{(p)} - 2(a_{ik}^{(p)})^2 = Q^{(p)} \cdot \left(1 - 2 \frac{(a_{ik}^{(p)})^2}{Q^{(p)}}\right).$$

Но $(a_{ik}^{(p)})^2 = \max_{r \neq m} (a_{rm}^{(p)})^2$. Поэтому $Q^{(p)} \leq (a_{ik}^{(p)})^2 \cdot n(n-1)$, где n – порядок матрицы A . Отсюда

$$\frac{(a_{ik}^{(p)})^2}{Q^{(p)}} \geq \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{и} \quad Q^{(p+1)} \leq Q^{(p)} \cdot \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right).$$

Полученное неравенство показывает, что при итерациях по методу Якоби сумма квадратов внедиагональных элементов матрицы убывает не медленнее, чем геометрическая прогрессия:

$$Q^{(p)} \leq Q^{(0)} \cdot \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^p,$$

и, следовательно, может быть сделана как угодно малой.

Итак, мы получили последовательность матриц $A^{(p)}$, унитарно подобных матрице A и приближающихся с ростом p к диагональной матрице. Поэтому можно ожидать, что диагональные элементы матриц $A^{(p)}$ с ростом p приближаются к собственным числам матрицы A .

Действительно, *можно показать, что* в интервале

$$\left] a_{ii}^{(p)} - \sqrt{Q^{(p)}}, a_{ii}^{(p)} + \sqrt{Q^{(p)}} \left[$$

содержится хотя бы одно собственное число матрицы A . Естественно назвать этот интервал *оценкой собственного числа*. Длина интервала-оценки, очевидно, может быть сделана как угодно малой при достаточном количестве итераций.

Матрицы $V^{(p)} = U^{(1)} \cdot \dots \cdot U^{(p)}$ унитарны, и их столбцы являются приближениями для собственных векторов матрицы A .

Терминологическое замечание. Матрица $U^{(1)}$ осуществляет поворот на угол φ_1 в плоскости $x_i O x_k$, проходящей через i -ю и k -ю координатные оси в пространстве \mathbb{R}^n (сравните с примером в п.7.6). Матрица $V^{(p)}$ – произведение нескольких матриц плоских вращений. Поэтому метод Якоби иногда называют *методом вращений*.

Эффективные численные алгоритмы, реализованные в средах конечного пользователя и в библиотеках стандартных Фортран-программ, обеспечивают решение полной проблемы собственных значений для *самосопряженных* матриц с машинной точностью.

Серьезное предупреждение. В случае *несамосопряженных* матриц ситуация осложняется. Как было показано, такие матрицы могут и не иметь полного набора линейно независимых собственных векторов. Реализованные в средах конечного пользователя и в библиотеках стандартных Фортран-программ алгоритмы решения полной проблемы собственных значений для произвольных матриц *не гарантируют* получение результата. Мы настоятельно рекомендуем следовать в этом случае совету Хемминга⁶⁰: не жечь зря машинное время, а обращаться за консультацией к специалистам.

⁶⁰Ричард Уэсли ХЕММИНГ (R.W. Hamming, 1915-1998), американский математик, участник Манхэттенского проекта, автор фундаментальных результатов в численном анализе, теории информации, теории кодирования ("код Хемминга"), теории цифровых фильтров. В 1988 г. IEEE учредил медаль в его честь.

9. ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ \mathbb{C}^n И \mathbb{R}^n

9.1. Линейные формы

В п.6.1 было показано, что всякая матрица A размера $m \times n$ порождает линейное отображение \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m : $x \rightarrow Ax$. В частном случае, когда $m = 1$, значения этого отображения – комплексные числа. Такое отображение называют *линейным функционалом* (*линейной формой*).

Итак, $(1 \times n)$ -матрица (матрица-строка) порождает линейный функционал – отображение \mathbb{C}^n в \mathbb{C} .

Пусть $A = [a_1, \dots, a_n]$. Тогда $Ax = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Введем вектор-столбец $a = A^* = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]^T$. Тогда наш линейный функционал может быть записан в терминах скалярного произведения

$$Ax = a^*x = \langle x, a \rangle.$$

Этот способ записи мы и будем, как правило, использовать.

Замечание. Вектор с вещественными компонентами, очевидно, порождает также вещественный линейный функционал на \mathbb{R}^n .

Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию линейной формы $y = \langle x, a \rangle$, заданной на \mathbb{R}^n ($a \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$).

Если $a = \theta$, то $y \equiv 0$. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что $a \neq \theta$.

Для $n = 1$ $a = [a]$, $x = [x]$, $y = ax$.

График этой формы – прямая на плоскости, проходящая через начало координат.

Для $n = 2$ $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \langle x, a \rangle = a_1x_1 + a_2x_2$.

График этой формы – плоскость, проходящая через начало координат.

Полезно рассмотреть также *линии уровня* этого функционала, т.е. линии в \mathbb{R}^2 , на которых функционал сохраняет постоянное значение. Полагая $y = const$, получим уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 = const. \quad (9.1.1)$$

Как известно, это уравнение определяет прямую.

Итак, график вещественного линейного функционала, заданного на \mathbb{R}^2 , – это плоскость, проходящая через начало координат, а его линии уровня образуют однопараметрическое семейство прямых на плоскости.

Рассмотрим прямую из этого семейства

$$\langle x, a \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (9.1.2)$$

Зафиксируем на ней точку $x^{(0)}$. Вычитая из (9.1.2) равенство $\langle x^{(0)}, a \rangle = c$, получим $\langle x - x^{(0)}, a \rangle = 0$. Таким образом, векторы $x - x^{(0)}$ и a ортогональны, и соответствующие им направленные отрезки перпендикулярны.

Но отрезок $\overrightarrow{x - x^{(0)}}$, очевидно, параллелен нашей прямой. Поэтому все прямые семейства перпендикулярны \vec{a} , и, следовательно, параллельны между собой (рис.9.1).

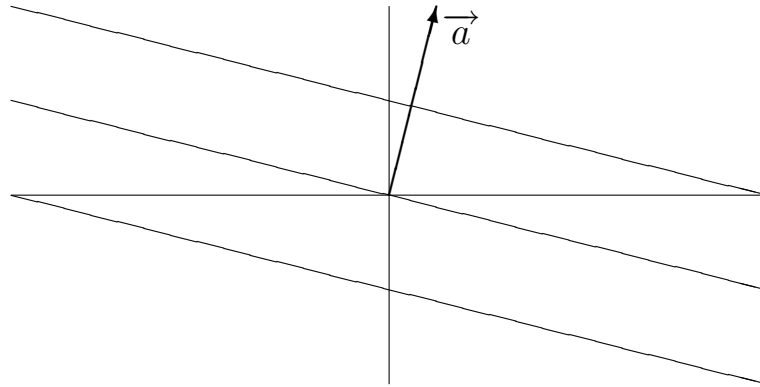


Рис.9.1

Замечания. 1. Как известно из школьного курса, любая прямая на плоскости задается уравнением (9.1.1). Поэтому любая прямая на плоскости является линией уровня некоторого линейного функционала.

2. Множество точек \mathbb{R}^2 , удовлетворяющих *линейному неравенству* $\langle x, a \rangle \leq c$, очевидно, есть объединение линий уровня $\langle x, a \rangle = \gamma$ при любых $\gamma \leq c$. Это одна из двух *полуплоскостей*, на которые прямая $\langle x, a \rangle = c$ делит плоскость. Множество точек, удовлетворяющих неравенству $\langle x, a \rangle \geq c$, образует вторую полуплоскость (рис.9.2).

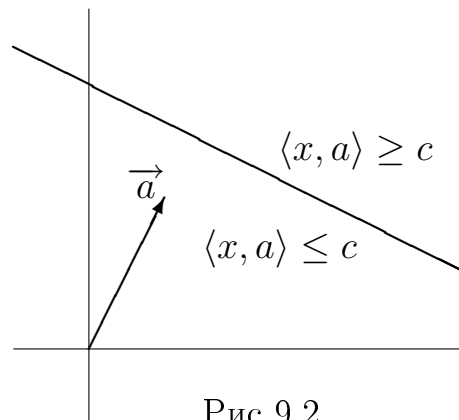


Рис.9.2

Для $n = 3$

$$a = [a_1, a_2, a_3]^T, \quad x = [x_1, x_2, x_3]^T, \quad y = \langle x, a \rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

График этого функционала построить невозможно, ибо три отпущенные нам природой оси декартовой системы координат заняты значениями компонент вектора x , и значения функционала девать уже некуда. Приходится ограничиться рассмотрением его *поверхностей уровня*, уравнения которых получаем, фиксируя значения функционала. Полагая $y = const$, имеем

$$\langle x, a \rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$$

– уравнение плоскости.

Итак, поверхности уровня нашего функционала образуют однопараметрическое семейство плоскостей.

Зафиксировав на одной из плоскостей этого семейства точку $x^{(0)}$, для любой другой точки x этой плоскости имеем $\langle x, a \rangle = c = \langle x^{(0)}, a \rangle$. Отсюда $\langle x - x^{(0)}, a \rangle = 0$ и, следовательно, направленный отрезок $x - x^{(0)}$ перпендикулярен \vec{a} .

Поскольку x и $x^{(0)}$ лежат в нашей плоскости, отрезок $x - x^{(0)}$ компланарен ей. Следовательно, эта плоскость перпендикулярна \vec{a} , и, значит, все плоскости семейства параллельны между собой.

Как и в двумерном случае, каждая плоскость в \mathbb{R}^3 является поверхностью уровня некоторого линейного функционала; множество точек, удовлетворяющих линейному неравенству $\langle x, a \rangle \leq c$, и множество точек, удовлетворяющих линейному неравенству $\langle x, a \rangle \geq c$, образуют два *полупространства*, разделяемых плоскостью $\langle x, a \rangle = c$.

9.2. Квадратичные формы

Пусть A – самосопряженная матрица порядка n , $x \in \mathbb{C}^n$. Тогда по формуле (8.1.1) $\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle x, Ax \rangle}$, а так как по свойству **2** скалярного произведения $\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle x, Ax \rangle}$, то $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Определение. Пусть A – самосопряженная матрица порядка n . Вещественная числовая функция, заданная на \mathbb{C}^n правилом $x \rightarrow \langle Ax, x \rangle$, называется *квадратичной формой* (*квадратичным функционалом*).

Запишем квадратичную форму через координаты вектора x :

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j;$$

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n (Ax)_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} |x_i|^2 + \sum_{j \neq i}^n a_{ij} x_i \bar{x}_j.$$

Наличие слагаемых с попарными произведениями координат затрудняет исследование квадратичной формы. Покажем, что от этого затруднения можно избавиться, если использовать для представления вектора ортонормированный собственный базис самосопряженной (!) матрицы A .

Как известно (п.8.1), $A = S\Lambda S^*$, где $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ – диагональная матрица, диагональ которой состоит из собственных чисел матрицы A , $S = [s^{(1)}, \dots, s^{(n)}]$ – унитарная матрица, столбцы которой – соответствующие этим собственным числам ортонормированные собственные векторы (собственный базис матрицы A в \mathbb{C}^n).

Разложим вектор x по этому базису:

$$x = \alpha_1 s^{(1)} + \dots + \alpha_n s^{(n)} \quad \text{или} \quad x = S\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T.$$

Отсюда

$$\langle Ax, x \rangle = x^* Ax = (S\alpha)^* A(S\alpha) = \alpha^* (S^* AS) \alpha = \alpha^* \Lambda \alpha = \langle \Lambda \alpha, \alpha \rangle,$$

или, в координатной записи,

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j |\alpha_j|^2. \quad (9.2.1)$$

Выражение (9.2.1) называется *каноническим представлением* квадратичной формы.

При исследовании квадратичной формы, как явствует из (9.2.1), важную роль играют собственные числа матрицы A . Введем в связи с этим несколько полезных терминов.

Определение. Если все собственные числа матрицы A положительны (отрицательны), то вследствие (9.2.1) квадратичная форма положительна (отрицательна) на \mathbb{C}^n , за исключением нулевого вектора, на котором она равна нулю. Такую квадратичную форму (как и ее матрицу) называют *положительно определенной* (*отрицательно определенной*).

Если все собственные числа матрицы A неотрицательны (неположительны), то и соответствующая квадратичная форма всюду неотрицательна (неположительна). Такую квадратичную форму (как и ее матрицу) называют *неотрицательно определенной* (*неположительно определенной*).

Пример. Пусть B – произвольная $(m \times n)$ -матрица. Рассмотрим матрицу Грама $G_B = B^*B$ (см. п.7.3). Для $x \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\langle G_B x, x \rangle = \langle B^* B x, x \rangle = \langle B x, B x \rangle = \|B x\|^2 \geq 0.$$

Таким образом, матрица Грама любого набора векторов неотрицательно определена.

Если векторы (столбцы матрицы B) линейно независимы, то по свойству **2** матрицы Грама $\det(G_B) \neq 0$. Поэтому ее собственные числа не могут равняться нулю и, следовательно, положительны. Таким образом, матрица Грама линейно независимого набора векторов положительно определена.

Если среди собственных чисел матрицы A есть и положительные, и отрицательные, то соответствующая квадратичная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, и называется *знакопеременной*.

Докажем теперь одно важное для приложений неравенство:

$$\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2. \quad (9.2.2)$$

Действительно, из (9.2.1) имеем

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \sum_{k=1}^n \lambda_k |\alpha_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_{\max} |\alpha_k|^2 = \lambda_{\max} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \lambda_{\max} \|\alpha\|^2; \\ \langle Ax, x \rangle &= \sum_{k=1}^n \lambda_k |\alpha_k|^2 \geq \sum_{k=1}^n \lambda_{\min} |\alpha_k|^2 = \lambda_{\min} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \lambda_{\min} \|\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Остается только заметить, что умножение на унитарную матрицу не меняет норму вектора. Следовательно, $\|x\| = \|S\alpha\| = \|\alpha\|$, и (9.2.2) доказано. ■

Определенная для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{C}^n$ функция

$$x \rightarrow \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2},$$

где A – самосопряженная $(n \times n)$ -матрица, называется *отношением Рэля*⁶¹. Из (9.2.2) следует, что значения отношения Рэля заключены между наименьшим и наибольшим собственными числами матрицы A .

⁶¹Джон Вильям СТРЕТТ, барон РЭЛЕЙ (J.W. Rayleigh, 1842-1919) – английский физик и математик, президент Лондонского Королевского общества, лауреат Нобелевской премии.

9.3. Геометрическая интерпретация квадратичных форм

В этом пункте рассматриваются квадратичные формы с *вещественной симметричной* матрицей, заданные на \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$.

Замечание. Легко видеть, что собственные векторы вещественной симметричной матрицы вещественны. Поэтому координаты вектора из \mathbb{R}^n в собственном базисе такой матрицы тоже вещественны.

Далее мы считаем, что матрица A ненулевая ("исследование" случая $A = \Theta$ тривиально – квадратичная форма тождественно равна нулю).

1. Квадратичная форма на $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$:

$A = [a]$ – матрица 1-го порядка, $y = \langle Ax, x \rangle = ax^2$.

График этой квадратичной формы – парабола (на рис.9.3 $a > 0$).

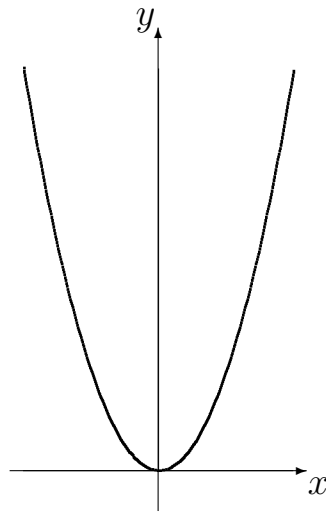


Рис.9.3

2. Квадратичная форма на \mathbb{R}^2 :

Условимся сразу записывать квадратичную форму в ортонормированном собственном базисе ее матрицы. Тогда

$$y = \langle Ax, x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

График этого функционала – поверхность в \mathbb{R}^3 . Для исследования вида этой поверхности рассмотрим линии уровня квадратичной формы.

а) Пусть квадратичная форма *положительно определена* ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$). Тогда, положив $y = c > 0$ (значение формы всюду неотрицательно и равно нулю только в начале координат), получим уравнение линии, во всех точках которой квадратичная форма равна c :

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = c, \quad \text{или} \quad \frac{x_1^2}{c/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{c/\lambda_2} = 1.$$

Это уравнение *эллипса* с полуосями $\sqrt{c/\lambda_1}$ и $\sqrt{c/\lambda_2}$ (рис.9.4).

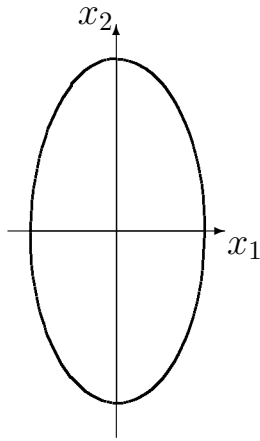


Рис.9.4

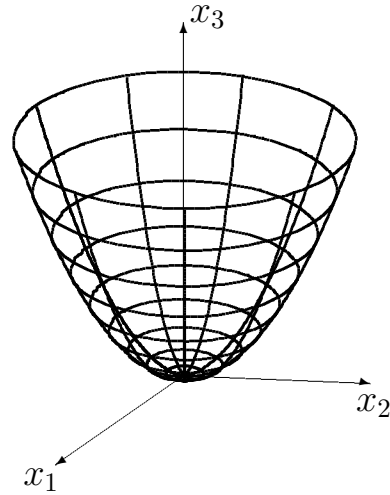


Рис.9.5

Таким образом, сечение нашей поверхности горизонтальной плоскостью есть эллипс, и полуоси этого эллипса неограниченно растут по мере удаления секущей плоскости от начала координат. Если учесть, что сечения поверхности вертикальными координатными плоскостями представляют собой параболы $y = \lambda_1 x_1^2$ и $y = \lambda_2 x_2^2$, то форма поверхности станет очевидной. Эта поверхность называется *эллиптическим параболоидом* (рис.9.5).

Если квадратичная форма отрицательно определена, то ее график, очевидно, также является эллиптическим параболоидом, но перевернутым "вверх ногами".

При $\lambda_1 = \lambda_2$ в сечениях поверхности горизонтальными плоскостями получаются окружности. Такой параболоид может быть получен вращением параболы $y = \lambda_1 x_1^2$, лежащей в плоскости $x_1 O y$, вокруг оси Oy . Он именуется *параболоидом вращения*.

б) Пусть квадратичная форма знакопеременна. Примем для определенности, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Уравнение линии уровня $y = c$ имеет вид

$$\lambda_1 \cdot x_1^2 - |\lambda_2| \cdot x_2^2 = c.$$

При $c > 0$ (сечение горизонтальной плоскостью, расположенной над координатной) это гипербола

$$\frac{x_1^2}{c/\lambda_1} - \frac{x_2^2}{c/|\lambda_2|} = 1$$

с полуосями $\sqrt{c/\lambda_1}$ и $\sqrt{c/|\lambda_2|}$, а при $c < 0$ (сечение горизонтальной плоскостью, расположенной под координатной) – гипербола

$$-\frac{x_1^2}{|c|/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{c/\lambda_2} = 1$$

с полуосями $\sqrt{|c|/\lambda_1}$ и $\sqrt{c/\lambda_2}$.

В сечении горизонтальной координатной плоскостью ($c = 0$) получается линия уровня $\lambda_1 \cdot x_1^2 = |\lambda_2| \cdot x_2^2$, представляющая собой пару пересекающихся прямых

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}} x_1,$$

разделяющих два семейства гипербол (рис.9.6).

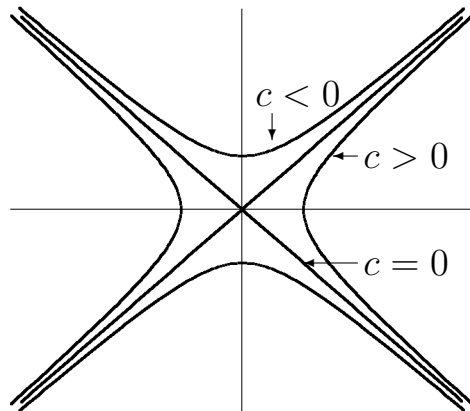


Рис.9.6

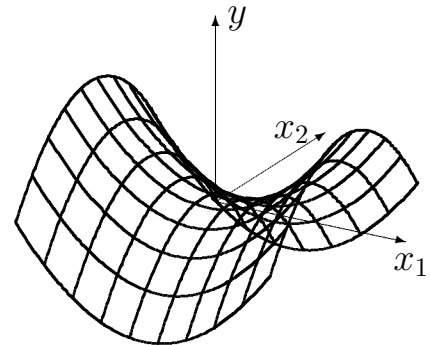


Рис.9.7

Сечения вертикальными координатными плоскостями – параболы $y = \lambda_1 x_1^2$ и $y = -|\lambda_2| x_2^2$. График знакопеременной квадратичной формы имеет вид бесконечного "седла" и называется *гиперболическим параболоидом* (рис.9.7).

в) При наличии у матрицы нулевого собственного числа (пусть, например, $\lambda_1 = 0$) график квадратичной формы $y = \lambda_2 x_2^2$ есть поверхность, во всех сечениях которой вертикальными плоскостями, перпендикулярными оси Ox_1 , получается одна и та же парабола. Эта поверхность называется *параболическим цилиндром* (рис.9.8).

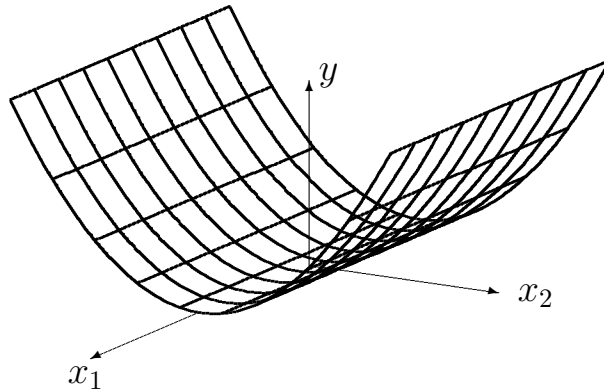


Рис.9.8

Образующая цилиндра параллельна оси Ox_1 . Линии уровня квадратичной формы – это пары параллельных прямых $x_2 = \pm\sqrt{c/\lambda_2}$ (знак c совпадает со знаком λ_2).

3. Квадратичная форма на \mathbb{R}^3 :

Записывая эту форму по-прежнему в собственном базисе матрицы A , получим

$$y = \langle Ax, x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2.$$

График этой квадратичной формы, очевидно, изобразить невозможно, на что указывалось уже при рассмотрении линейных форм. Рассмотрим поверхности уровня.

а) Если квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то задавая положительное (отрицательное) ее значение $y = c$, получим уравнение поверхности уровня

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = c, \quad \text{или} \quad \frac{x_1^2}{c/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{c/\lambda_2} + \frac{x_3^2}{c/\lambda_3} = 1.$$

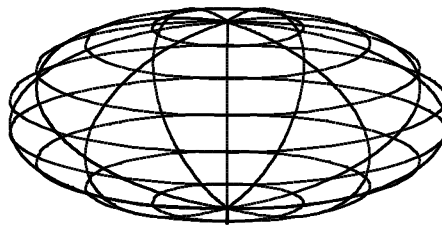


Рис.9.9

Это уравнение *эллипсоида* с полуосями $\sqrt{c/\lambda_1}$, $\sqrt{c/\lambda_2}$ и $\sqrt{c/\lambda_3}$ (рис.9.9). В сечениях эллипсоида плоскостями, параллельными координатным, получаются эллипсы (проверьте это!).

Если две из трех полуосей равны между собой (например, $\lambda_1 = \lambda_2$), то эллипсоид может быть получен вращением эллипса $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_3 x_3^2 = c$, лежащего в координатной плоскости $x_1 O x_3$, вокруг оси $O x_1$. Такой эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*. Если же все полуоси равны, то поверхности уровня квадратичной формы – сферы.

б) Если квадратичная форма знакопеременна, и среди ее собственных чисел нет нуля, то будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$. Рассмотрим сначала поверхности уровня, на которых эта квадратичная форма положительна. Уравнение такой поверхности имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - |\lambda_3| x_3^2 = c > 0, \quad \text{или} \quad \frac{x_1^2}{c/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{c/\lambda_2} - \frac{x_3^2}{c/|\lambda_3|} = 1.$$

Это *одноплостный гиперболоид* (рис.9.10). Проверьте, что в сечениях горизонтальными плоскостями получаются эллипсы (в частном случае – при $\lambda_1 = \lambda_2$ – окружности), а в сечениях координатными плоскостями $x_1 O x_3$ и $x_2 O x_3$ – гиперболы.

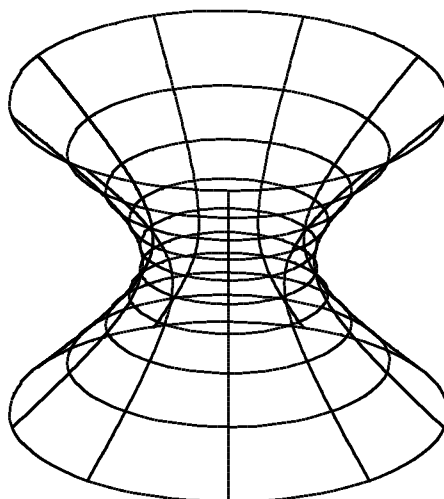


Рис.9.10

Поверхность уровня, на которой квадратичная форма отрицательна, – *двухплостный гиперболоид*⁶² (рис.9.11) – имеет уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - |\lambda_3| x_3^2 = c < 0, \quad \text{или} \quad \frac{x_1^2}{|c|/\lambda_1} + \frac{x_2^2}{|c|/\lambda_2} - \frac{x_3^2}{c/\lambda_3} = -1.$$

Исследуйте ее сечения плоскостями, параллельными координатным.

⁶²По утверждению инженера Гарина, именно эта поверхность была взята им за основу при построении его смертоносного оружия. На самом же деле оптическим свойством, описанным в романе А.Н. Толстого, обладает параболоид вращения.

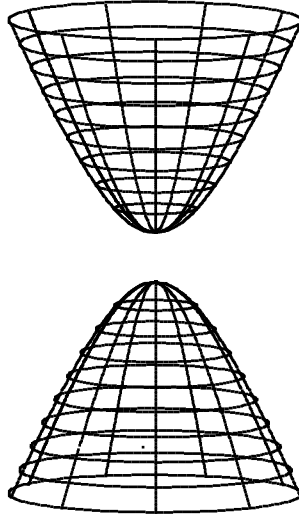


Рис.9.11

Уравнение поверхности, на которой квадратичная форма равна нулю,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - |\lambda_3| x_3^2 = 0.$$

Это *конус*, разделяющий семейства однополостных и двухполостных гиперболоидов (рис.9.12). Проверьте, что в сечениях горизонтальными плоскостями получаются эллипсы, а в сечениях координатными плоскостями $x_1 O x_3$ и $x_2 O x_3$ – пары пересекающихся прямых. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то конус называется *прямым круговым конусом*.

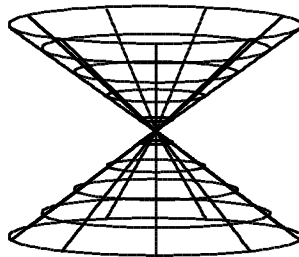


Рис.9.12

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что случай одного положительного и двух отрицательных собственных чисел не дает поверхностей уровня, отличных от уже рассмотренных.

в) Пусть теперь одно собственное число (например, λ_3) равно нулю. Тогда остается рассмотреть случаи $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.

Если λ_1, λ_2 (а также c) положительны, то уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = c$$

определяет *эллиптический* (при $\lambda_1 = \lambda_2$ – *круговой*) цилиндр с образующей, параллельной оси Ox_3 (рис.9.13). Такой же цилиндр получается, если λ_1, λ_2 и c отрицательны.

Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, то уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 - |\lambda_2| x_2^2 = c$$

определяет при $c \neq 0$ *гиперболический цилиндр* с образующей, параллельной оси Ox_3 (рис.9.14), а при $c = 0$ – пару пересекающихся плоскостей

$$\sqrt{\lambda_1} x_1 \pm \sqrt{|\lambda_2|} x_2 = 0.$$

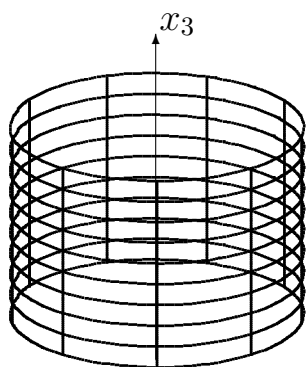


Рис.9.13

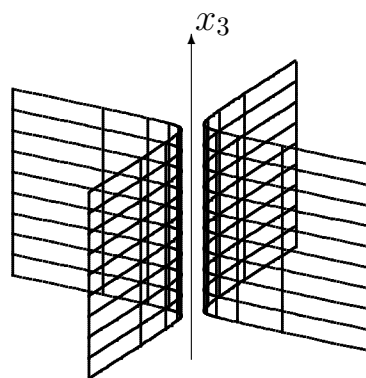


Рис.9.14

г) Если, наконец, равны нулю два собственных числа из трех, то уравнение поверхности уровня имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 = c \quad (\lambda_1 \cdot c \geq 0).$$

Это уравнение пары параллельных плоскостей $x_1 = \pm \sqrt{\frac{c}{\lambda_1}}$ (при $c = 0$ – одной плоскости).

Глава 10. ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

10.1. Сингулярные числа и сингулярные базисы матрицы

Пусть A – матрица размера $m \times n$. Как известно, она порождает линейный оператор $x \rightarrow Ax$, действующий из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m .

Оператор $y \rightarrow A^*y$, порождаемый сопряженной к A матрицей A^* , действует из \mathbb{C}^m в \mathbb{C}^n .

Рассмотрим матрицы Грама

$$P = G_A = A^*A \quad \text{и} \quad Q = G_{A^*} = (A^*)^*A^* = AA^*.$$

Как известно, они эрмитовы и неотрицательно определены. Их порядки равны n и m соответственно.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ – собственные числа матрицы P , $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ – соответствующие им ортонормированные собственные векторы в пространстве \mathbb{C}^n . Рассмотрим свойства образов этих векторов в \mathbb{C}^m .

Теорема. 1. Векторы $Av^{(i)}$ и $Av^{(j)}$ ортогональны при $i \neq j$.

2. Если $\lambda_i = 0$, то $Av^{(i)} = \theta_m$.

3. Если $\lambda_i > 0$, то λ_i является также собственным числом матрицы Q , а $Av^{(i)}$ – соответствующий ему собственный вектор этой матрицы.

Доказательство. Обозначим $h^{(i)} = Av^{(i)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle h^{(i)}, h^{(j)} \rangle &= \langle Av^{(i)}, Av^{(j)} \rangle = \langle A^*Av^{(i)}, v^{(j)} \rangle = \\ &= \langle Pv^{(i)}, v^{(j)} \rangle = \lambda_i \langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle. \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

Полагая в (10.1.1) $i \neq j$, получим доказательство утверждения **1**. Полагая там же $i = j$, получим

$$\|h^{(i)}\|^2 = \lambda_i \|v^{(i)}\|^2 = \lambda_i.$$

Следовательно, при $\lambda_i = 0$ $\|h^{(i)}\|^2 = 0$, т.е. $h^{(i)} = \theta_m$. Доказано утверждение **2**. Далее,

$$\begin{aligned} Qh^{(i)} &= (AA^*)(Av^{(i)}) = A(A^*A)v^{(i)} = A(Pv^{(i)}) = \\ &= A(\lambda_i v^{(i)}) = \lambda_i (Av^{(i)}) = \lambda_i h^{(i)}. \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

Из (10.1.2) следует утверждение **3** (при $\lambda_i \neq 0$ $h^{(i)} \neq \theta_m$). ■

Поменяв местами матрицы P и Q и повторив доказательство, получим

Следствие. Ненулевые собственные числа матриц P и Q попарно совпадают.

В дальнейшем будем считать, что r – общее количество ненулевых собственных чисел этих матриц (с учетом кратности). Тогда кратности нулевого собственного числа у матриц P и Q будут соответственно равны $n - r$ и $m - r$. В частности, при разных порядках матриц у "меньшей" может вообще не быть нулевых собственных чисел.

Упорядочим теперь положительные собственные числа по убыванию:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0.$$

Введем векторы $u^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$, следующим образом:

$$\text{При } j \leq r \quad u^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} h^{(j)} \quad (\text{в силу (10.1.3) } \|u^{(j)}\| = 1);$$

При $r < j \leq m$ $u^{(j)}$ – ортонормированные собственные векторы матрицы Q , соответствующие нулевому собственному числу.

Из формулы (10.1.1) видно, что векторы образуют ортонормированный собственный базис матрицы Q . Далее, по построению

$$\begin{aligned} Av^{(j)} &= h^{(j)} = \sqrt{\lambda_j} u^{(j)} \quad (j \leq r); \\ Av^{(j)} &= \theta_m \quad (r < j \leq m). \end{aligned} \tag{10.1.4}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} A^* u^{(j)} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (A^* A) v^{(j)} = \sqrt{\lambda_j} v^{(j)} \quad (j \leq r); \\ A^* u^{(j)} &= \theta_n \quad (r < j \leq m). \end{aligned} \tag{10.1.5}$$

Введем теперь важное новое понятие.

Определение. Квадратные корни из общих ненулевых собственных чисел матриц $P = A^* A$ и $Q = A A^*$ ($\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, $j = 1, \dots, r$) называются *сингулярными числами* матрицы A . Ортонормированные базисы, состоящие из собственных векторов матрицы P (в пространстве \mathbb{C}^n) и из собственных векторов матрицы Q (в пространстве \mathbb{C}^m) называются *сингулярными базисами* матрицы A (соответственно *правым* и *левым*).

Сведем векторы сингулярных базисов в унитарные матрицы

$$U = [u^{(1)}, \dots, u^{(m)}] \quad \text{и} \quad V = [v^{(1)}, \dots, v^{(n)}].$$

Теорема. $(m \times n)$ -матрица $\Sigma = U^*AV$ имеет структуру

$$\Sigma = U^*AV = \begin{bmatrix} \Sigma_r & \vdots & \mathbb{O}_{r \times (n-r)} \\ \dots\dots\dots & & \\ \mathbb{O}_{(m-r) \times r} & \vdots & \mathbb{O}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}, \quad (10.1.6)$$

где $\Sigma_r = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_r]$, а \mathbb{O} – нулевые матрицы, размеры которых обозначены в виде индексов.

Доказательство. Из (10.1.4) имеем

$$\begin{aligned} AV &= A \cdot [v^{(1)}, \dots, v^{(r)}, v^{(r+1)}, \dots, v^{(m)}] = \\ &= [Av^{(1)}, \dots, Av^{(r)}, Av^{(r+1)}, \dots, Av^{(m)}] = \\ &= [\sigma_1 u^{(1)}, \dots, \sigma_r u^{(r)}, \underbrace{\theta_m, \dots, \theta_m}_{(n-r)}]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} U^*AV &= U^* \cdot [\sigma_1 u^{(1)}, \dots, \sigma_r u^{(r)}, \underbrace{\theta_m, \dots, \theta_m}_{(n-r)}] = \\ &= [u^{(1)}, \dots, u^{(r)}, u^{(r+1)}, \dots, u^{(m)}]^* \cdot [\sigma_1 u^{(1)}, \dots, \sigma_r u^{(r)}, \underbrace{\theta_m, \dots, \theta_m}_{(n-r)}] = \Sigma. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Равенство $U^*AV = \Sigma$ можно переписать в виде $A = U\Sigma V^*$. Такое представление матрицы называется ее *сингулярным разложением*.

Серьезное предупреждение. Сингулярное разложение матрицы несколько напоминает спектральное разложение эрмитовой матрицы. Однако в общем случае правый и левый сингулярные базисы не совпадают. Даже если матрица эрмитова, можно утверждать лишь, что ее сингулярные числа равны *модулям* ненулевых собственных чисел. Только для неотрицательно определенных эрмитовых матриц сингулярные числа совпадают с ненулевыми собственными числами, правый и левый сингулярные базисы одинаковы и совпадают с собственным базисом матрицы.

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^*A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\det(A^*A - \lambda I) = \lambda^2 - 6\lambda + 8; \quad \lambda_1(A^*A) = 4, \quad \lambda_2(A^*A) = 2.$$

Сингулярные числа матрицы A : $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}$.

Найдем собственные векторы матрицы A^*A :

$$(A^*A - 4I)x = \theta \iff x = \alpha[1 \ 1]^T, \alpha \neq 0; \quad v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \ 1]^T;$$

$$(A^*A - 2I)x = \theta \iff x = \beta[1 \ -1]^T, \beta \neq 0; \quad v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \ -1]^T.$$

Два собственных числа матрицы AA^* совпадают с ненулевыми собственными числами матрицы A^*A , а третье обязано быть нулем. Итак, $\lambda_1(AA^*) = 4$, $\lambda_2(AA^*) = 2$, $\lambda_3(AA^*) = 0$.

Собственные векторы матрицы AA^* , соответствующие ее ненулевым собственным числам, найдем по формуле (10.1.4):

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sigma_1}Av^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \ 1 \ 0]^T, \quad u^{(2)} = \frac{1}{\sigma_2}Av^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[0 \ 0 \ 1]^T.$$

Третий собственный вектор найдем из соответствующей однородной системы и условия нормировки:

$$AA^*x = \theta \iff x = \alpha[1 \ -1 \ 0]^T, \alpha \neq 0; \quad u^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \ -1 \ 0]^T.$$

Сведем собственные векторы в матрицы

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выпишем сингулярное разложение $A = U\Sigma V^*$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

10.2. Псевдорешение системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$Ax = b \tag{10.2.1}$$

с матрицей A размера $m \times n$, столбцом свободных членов $b \in \mathbb{C}^m$ и переменным вектором $x \in \mathbb{C}^n$.

Назовем *вектором невязок* системы (10.2.1) вектор

$$d(x) = b - Ax.$$

Тогда, очевидно, решением системы (10.2.1) будет такой вектор $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, что $d(x^{(0)}) = \theta_m$.

При решении содержательных прикладных задач часто встречаются ситуации, в которых система линейных уравнений несовместна, хотя по "физическому смыслу" решение должно существовать. Объясняется это, как правило, тем, что коэффициенты и свободные члены системы, полученные из эксперимента, содержат погрешности.

В таких ситуациях разумно выбирать переменный вектор в системе (10.2.1) так, чтобы норма невязки, которую мы не можем сделать равной нулю, оказалась бы минимально возможной.

Определение. *Псевдорешением* системы линейных алгебраических уравнений (10.2.1) называется такой вектор $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$, что $\|d(\tilde{x})\| \leq \|d(x)\|$ для всех $x \in \mathbb{C}^n$, т.е. вектор, минимизирующий евклидову норму невязки.

Отметим, что в случае совместной системы любое ее решение $x^{(0)}$ является псевдорешением, поскольку $0 = \|d(x^{(0)})\| \leq \|d(x)\|$ для всех $x \in \mathbb{C}^n$.

Теорема. Всякая система линейных алгебраических уравнений имеет псевдорешение.

Доказательство. Пусть $A = U\Sigma V^*$ – сингулярное разложение матрицы коэффициентов системы (напомним, что U и V – унитарные матрицы сингулярных базисов – имеют порядки m и n соответственно, а $(m \times n)$ -матрица Σ имеет вид (10.1.6)).

Разложим вектор свободных членов b по сингулярному базису в \mathbb{C}^m :

$$b = c_1 u^{(1)} + \dots + c_m u^{(m)}, \quad \text{или} \quad b = Uc. \quad (10.2.2)$$

Вектор-псевдорешение \tilde{x} будем искать в виде разложения по сингулярному базису в \mathbb{C}^n :

$$\tilde{x} = \alpha_1 v^{(1)} + \dots + \alpha_n v^{(n)}, \quad \text{или} \quad \tilde{x} = V\alpha, \quad (10.2.3)$$

где α – новый искомый вектор.

Подставив (10.2.2) и (10.2.3) в уравнение (10.2.1), получим

$$AV\alpha = Uc.$$

Умножая это уравнение на $U^* = U^{-1}$ слева и учитывая, что $U^*AV = \Sigma$, имеем

$$\Sigma\alpha = c. \quad (10.2.4)$$

Покажем, что нормы невязок систем (10.2.1) и (10.2.4) равны, т.е. задача свелась к отысканию псевдорешения системы (10.2.4). Действительно, из (10.2.3) имеем $\alpha = V^*\tilde{x}$ и, следовательно,

$$b - A\tilde{x} = Uc - U\Sigma V^*\tilde{x} = U \cdot (c - \Sigma\alpha).$$

Умножение на унитарную матрицу сохраняет норму вектора. Поэтому

$$\|b - A\tilde{x}\| = \|U \cdot (c - \Sigma\alpha)\| = \|c - \Sigma\alpha\|.$$

Но

$$\Sigma\alpha = [\sigma_1\alpha_1, \dots, \sigma_r\alpha_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-r)}]^T,$$

и квадрат нормы невязки для системы (10.2.4) равен

$$\|c - \Sigma\alpha\|^2 = |c_1 - \sigma_1\alpha_1|^2 + \dots + |c_r - \sigma_r\alpha_r|^2 + |c_{r+1}|^2 + \dots + |c_m|^2. \quad (10.2.5)$$

Из (10.2.5) видно, что минимум нормы невязки достигается при

$$\alpha_j = \frac{c_j}{\sigma_j}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (10.2.6)$$

и равен $(|c_{r+1}|^2 + \dots + |c_m|^2)^{1/2}$. Теорема доказана. ■

Рассмотрим частные случаи.

1. $r = n$. В этом случае равенства (10.2.6) однозначно определяют все компоненты вектора α . По формуле (10.2.3) получаем $\tilde{x} = V\alpha$ — единственное псевдорешение системы (10.2.1).

2. $r < n$. В этом случае из (10.2.6) определяются только первые r компонент вектора α . Однако формула (10.2.5) показывает, что оставшиеся компоненты не влияют на величину невязки и могут быть выбраны произвольно. В этом случае псевдорешение *не единственно*. Обычно полагают

$$\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0. \quad (10.2.7)$$

Соответствующее псевдорешение $\tilde{x} = V\alpha$ называют *нормальным псевдорешением* системы (10.2.1).

Очевидно, всякая система линейных уравнений имеет единственное нормальное псевдорешение. Среди всех возможных псевдорешений оно выделяется наименьшей нормой.

3. $r = m$. В этом случае любое псевдорешение обеспечивает нулевую норму невязки, т.е. является *решением* системы (10.2.1).

Серьезное предупреждение. Не следует путать понятия "псевдорешение" и "приближенное решение" системы линейных алгебраических уравнений. О приближенном решении можно говорить только в случае совместной системы (вектор приближенного решения в каком-то смысле близок к существующему "точному" решению). Но в этом случае псевдорешение совпадает с решением.

В отличие от решения псевдорешение существует и у несовместной системы, когда говорить о приближенном решении бессмысленно, так как решение отсутствует и приближаться не к чему!

Терминологическое замечание. Псевдорешение системы линейных уравнений часто называют *решением в смысле наименьших квадратов*, а метод отыскания псевдорешения – *методом наименьших квадратов*. Это историческое название объясняется тем, что минимизируется квадрат евклидовой нормы невязки, который сводится к сумме квадратов модулей невязок всех уравнений системы.

Почему из всевозможных мер близости выбрана именно *евклидова* норма? Потому, что такой выбор приводит к простому алгоритму построения псевдорешения. Никаких "более глубоких" обоснований у этого метода нет. Заметим, что иногда пользуются и другими нормами.

Замечание. Геометрическая интерпретация псевдорешения весьма проста: это такой вектор $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$, который при умножении на матрицу коэффициентов системы переходит в вектор пространства \mathbb{C}^m , "ближайший" к вектору-свободному члену. При этом расстояние между векторами определяется по теореме Пифагора.

Пример. Найдем нормальное псевдорешение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases},$$

или, в матричном виде,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Сингулярное разложение матрицы коэффициентов этой системы было получено в п.10.1. Используя его, перепишем систему:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Умножив это равенство слева на $U^* = U^{-1}$, получим

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

или

$$2\alpha_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}; \quad \sqrt{2}\alpha_2 = 3; \quad 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Умножив обе части равенства на $V = (V^*)^{-1}$, получим нормальное псевдорешение системы $\tilde{x} = [9/4 \quad -3/4]^T$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию этого примера.

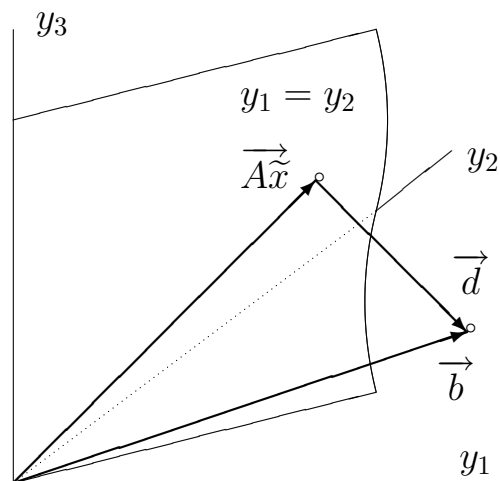


Рис.10.1

Пусть $y = [y_1, y_2, y_3]^T$ – образ вектора $x = [x_1, x_2]^T$ при отображении $y = Ax$. Тогда $y_1 = x_1 + x_2 = y_2$, т.е. множество значений этого отображения есть плоскость $y_1 = y_2$ в \mathbb{R}^3 (рис.10.1). Точка с координатами $(1, 2, 3)$ в этой плоскости не лежит, т.е. система уравнений не имеет решения. Ближайшая к этой точке точка плоскости $y_1 = y_2$ есть образ псевдорешения (см. Замечание):

$$A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9/4 \\ -3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Вектор невязки $d(\tilde{x}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]^T$, а его норма $\|d(\tilde{x})\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

10.3. Псевдообратная матрица. Нормальные уравнения

В предыдущем пункте было построено псевдорешение системы (10.2.1). Запишем формулы для вычисления псевдорешения в матричной форме. Для этого введем $(n \times m)$ -матрицу следующей структуры

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_r^+ & \vdots & \mathbb{O}_{r \times (m-r)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbb{O}_{(n-r) \times r} & \vdots & \mathbb{O}_{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix},$$

где $\Sigma_r^+ = \text{diag} \left[\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r} \right]$, а \mathbb{O} – нулевые матрицы, размеры которых обозначены в виде индексов.

Нетрудно убедиться в том, что формулы (10.2.6) и (10.2.7) можно переписать в виде $\alpha = \Sigma^+c$ (проверьте это!). Тогда нормальное псевдорешение системы (10.2.1) запишется в виде

$$\tilde{x} = V\alpha = V\Sigma^+c = V\Sigma^+U^*b.$$

Если матрица коэффициентов системы A квадратная и обратимая, то решение этой системы получается, как известно, умножением свободного члена слева на обратную матрицу: $x = A^{-1}b$.

Назовем матрицу $A^+ = V\Sigma^+U^*$ псевдообратной. Тогда нормальное псевдорешение получается умножением свободного члена слева на псевдообратную матрицу:

$$\tilde{x} = A^+b. \tag{10.3.1}$$

Замечание. Если $r = m = n$, то матрица Σ , очевидно, обратима, и $\Sigma^+ = \Sigma^{-1}$. Поэтому

$$A^+ = V\Sigma^+U^* = V\Sigma^{-1}U^{-1} = (U\Sigma V^{-1})^{-1} = (U\Sigma V^*)^{-1} = A^{-1},$$

т.е. если матрица обратима, то ее псевдообратная совпадает с ее обратной. Это согласуется с утверждением (см. п.10.2), что в этом случае псевдорешение единственно ($r = n$) и является решением системы ($r = m$).

Серьезное предупреждение. Формула (10.3.1) есть не более, чем удобная форма записи результата. Так же как для нахождения решения системы незачем вычислять обратную матрицу, для нахождения нормального псевдорешения нет смысла вычислять псевдообратную матрицу, а следует пользоваться формулами п.10.2.

Докажем теперь, что $A^*AA^+ = A^*$. Действительно,

$$\begin{aligned} \Sigma \cdot \Sigma^+ &= \begin{bmatrix} \Sigma_r & \vdots & \mathbb{O}_{r \times (n-r)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O}_{(m-r) \times r} & \vdots & \mathbb{O}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_r^+ & \vdots & \mathbb{O}_{r \times (m-r)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O}_{(n-r) \times r} & \vdots & \mathbb{O}_{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} I_r & \vdots & \mathbb{O}_{r \times (m-r)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O}_{(m-r) \times r} & \vdots & \mathbb{O}_{(m-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}; \\ \Sigma^* \cdot \Sigma \cdot \Sigma^+ &= \begin{bmatrix} \Sigma_r & \vdots & \mathbb{O}_{r \times (n-r)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O}_{(m-r) \times r} & \vdots & \mathbb{O}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_r & \vdots & \mathbb{O}_{r \times (m-r)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O}_{(m-r) \times r} & \vdots & \mathbb{O}_{(m-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} = \Sigma^*. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A^*AA^+ &= (U\Sigma V^*)^* \cdot (U\Sigma V^*) \cdot (V\Sigma^+U^*) = \\ &= V\Sigma^*(U^*U)\Sigma(V^*V)\Sigma^+U^* = V \cdot (\Sigma^*\Sigma\Sigma^+) \cdot U^* = V\Sigma^*U^* = A^*. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Умножив теперь обе части (10.3.1) слева на A^*A , получим

$$A^*A\tilde{x} = (A^*AA^+)b = A^*b.$$

Таким образом, нормальное псевдорешение системы (10.2.1) будет решением системы

$$(A^*A)x = A^*b, \quad (10.3.2)$$

получающейся из (10.2.1) умножением обеих частей слева на матрицу A^* . Уравнения (10.2.3) называются *нормальными уравнениями* метода наименьших квадратов.

Серьезное предупреждение. Возникает вопрос: для чего же было мучиться столько времени, вводить новые понятия "сингулярное разложение" и "псевдорешение"? Не проще ли построить систему нормальных уравнений и решить ее?

Оказывается, все не так просто.

Во-первых, никто не гарантирует нам невырожденности матрицы $G_A = A^*A$ (которая равносильна, как известно, линейной независимости столбцов матрицы A). Если матрица Грама окажется вырожденной, то нам все равно придется искать псевдорешение, но уже системы (10.3.2)!

Во-вторых, если даже матрица системы (10.3.2) не вырождена, то при переходе к нормальным уравнениям резко возрастают вычислительные трудности (см. главу 13).

Поэтому мы настоятельно рекомендуем *не пользоваться нормальными уравнениями* (тем более, что численно устойчивые алгоритмы сингулярного разложения и построения нормального псевдорешения реализованы и в средах конечного пользователя, и в библиотеках Фортрана).

Замечание. Отметим один случай, когда все-таки можно переходить к нормальным уравнениям. Если столбцы матрицы попарно ортогональны, то матрица Грама окажется диагональной, и решение системы (10.3.2) – нормальное псевдорешение системы (10.2.1) – выписывается в явном виде:

$$\tilde{x}_k = \frac{(A^*b)_k}{\|a^{(k)}\|^2} = \frac{\langle b, a^{(k)} \rangle}{\|a^{(k)}\|^2}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10.3.3)$$

Глава 11. СГЛАЖИВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

11.1. Одна содержательная задача

Описание проблемы, которой посвящена эта глава, мы начнем с простейшего примера – измерения сопротивления резистора методом амперметра и вольтметра. Метод этот, как известно, состоит в том, что одновременно измеряются: ток J , текущий через резистор, и U – падение напряжения на нем (рис.11.1).

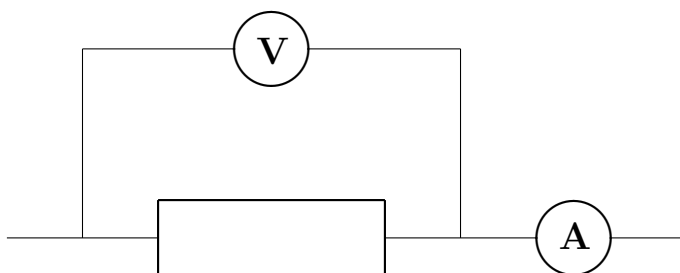


Рис.11.1

Если пренебречь током, текущим через вольтметр, то, в соответствии с законом Ома, искомое сопротивление находится по формуле $R = U/J$.

Дело, однако, осложняется тем, что, повторяя измерения, получают каждый раз новое значение сопротивления. Возможны два различных толкования этого экспериментального факта.

1. Сопротивление резистора не постоянно, а изменяется со временем.
2. Сопротивление постоянно, но данные измерений содержат ошибки (погрешности приборов, субъективные ошибки наблюдателя и пр.)

Следует ясно понимать, что
*без выбора математической модели эксперимента
его результаты обрабатывать нельзя.*

В нашей задаче мы *постулируем* неизменность сопротивления резистора во времени (выяснение правомерности такого постулата выходит, естественно, за рамки курса математики) и взваливаем ответственность за его наблюдающиеся изменения на погрешности. Тогда, проведя серию из n измерений, мы можем записать их результаты в виде

$$\begin{cases} J_1 R = U_1 \\ \dots\dots\dots \\ J_n R = U_n \end{cases}$$

т.е. в виде системы из n линейных уравнений с одной переменной – искомым сопротивлением. Поскольку эта система, очевидно, несовместна, будем искать ее псевдорешение. Несмотря на простоту задачи, сделаем все операции подробно, чтобы еще раз продемонстрировать методику.

Запишем систему в виде

$$JR = U, \tag{11.1.1}$$

где $J = [J_1, \dots, J_n]^T$, $U = [U_1, \dots, U_n]^T$.

Матрица $J^*J = [J_1^2 + \dots + J_n^2]$ имеет размер 1×1 , а матрица

$$JJ^* = \begin{bmatrix} J_1^2 & J_1 J_2 & \dots & J_1 J_n \\ \dots\dots\dots \\ J_n J_1 & J_n J_2 & \dots & J_n^2 \end{bmatrix}$$

– размер $n \times n$.

Так как J^*J имеет размер 1×1 , сингулярное число оказывается единственным – это положительный корень уравнения

$$\det(J^*J - \sigma^2 I_1) = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n J_k^2 - \sigma^2 = 0, \quad \text{т.е.} \quad \sigma = \left(\sum_{k=1}^n J_k^2 \right)^{1/2}.$$

Соответствующие сингулярные базисы находятся так: *правый* (состоящий из одного вектора) – путем решения однородной "системы"

$$(J^*J - \sigma^2 I_1)v^{(1)} = \theta_1, \quad \text{или} \quad \theta_1 \cdot v^{(1)} = \theta_1, \quad \text{т.е.} \quad v^{(1)} = [1]$$

(напомним, что сингулярный вектор берется нормированным). По известному из п.10.1 правилу находим соответствующий сингулярный вектор $w^{(1)} = \frac{1}{\sigma} J v^{(1)} = \frac{1}{\sigma} J$ и дополняем его до ортонормированного базиса.

Сингулярное разложение матрицы J имеет вид $J = W \Sigma V^*$, где $V^* = V = [1]$, $W = [w^{(1)}, \dots, w^{(n)}]$ – унитарная матрица порядка n , а $\Sigma = [\sigma, 0, \dots, 0]^T$ – столбец высоты n .

Матрица $\Sigma^+ = [1/\sigma, 0, \dots, 0]$ – строка ширины n . Поэтому

$$J^+ = V \Sigma^+ W^* = \frac{1}{\sigma} w^{(1)*} = \frac{1}{\sigma^2} J^*.$$

Теперь можно по формуле (10.3.1) найти псевдорешение:

$$\tilde{R} = J^+ U = \frac{1}{\sigma^2} J^* U = \frac{1}{\sigma^2} (J_1 U_1 + \dots + J_n U_n) = \frac{J_1 U_1 + \dots + J_n U_n}{J_1^2 + \dots + J_n^2}.$$

Внимательный читатель заметит, что проще было бы в уравнении (11.1.1) умножить обе части слева на J^* (перейти к нормальным уравнениям):

$$(J^*J)\tilde{R} = J^*U \quad \Longrightarrow \quad \tilde{R} = \frac{J^*U}{J^*J} = \frac{J_1U_1 + \dots + J_nU_n}{J_1^2 + \dots + J_n^2}.$$

Но мы, повторяем, хотели еще раз продемонстрировать методику построения псевдорешения с помощью сингулярного разложения матрицы системы.

Полученное число \tilde{R} можно истолковать как значение сопротивления резистора, "наилучшим образом согласующееся" сразу со всеми результатами измерения (при этом степень согласованности понимается так, как было сказано в замечании п.10.2). Можно полагать, что таким образом мы избавились от "случайных" погрешностей в результатах измерений – *сгладили* эти результаты.

Серьезное предупреждение. Подчеркнем еще раз, что приведенные выше рассуждения имеют смысл *только в рамках принятой математической модели* – сопротивление резистора предполагается постоянным во времени. Если же наша модель не верна, и сопротивление на самом деле изменялось во время измерений, то такое "сглаживание" превращается в искажение реально наблюдаемого явления.

11.2. Полиномиальное сглаживание

Рассмотрим (с меньшей конкретизацией содержательной постановки) еще одну распространенную прикладную задачу.

Информационно-измерительная система (ИИС) фиксирует в равноотстоящие моменты времени t_1, \dots, t_n значения некоторой измеряемой величины y_1, \dots, y_n .

Требуется (как обычно говорят прикладники) "подобрать какую-нибудь *простую и удобную* функцию, которая *хорошо описывала бы* полученные результаты".

Попытаемся придать точный смысл этой туманной фразе.

По-видимому слова "хорошо описывает" можно понимать только в одном смысле: поскольку ИИС никаких сведений об измеряемой величине, кроме пар чисел (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, не имеет, подобранная нами (мы будем называть ее *аппроксимирующей*) функция в точках t_1, \dots, t_n должна принимать значения y_1, \dots, y_n соответственно.

Второе требование – "простота" функции – обычно считается удовлетворенным, если предлагается полином не очень большой степени.

Отметим, что целесообразно стандартизовать задачу, введя вместо времени t целочисленную переменную (номер измерения), связанную с t формулой $t_k = t_1 + (k - 1) \cdot \Delta t$, $k = 1, \dots, n$ (напомним, что моменты времени считаются равноотстоящими; Δt – шаг по времени). Тогда сглаживающий полином примет вид

$$s(k) = s_1 + s_2 k + \dots + s_m k^{m-1},$$

и столбец его коэффициентов s будет псевдорешением линейной системы $\tilde{T}S = y$, где

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \dots & n^{m-1} \end{bmatrix}$$

– теперь уже стандартная (при фиксированных значениях n и m) матрица, для которой заранее может быть найдено сингулярное разложение.

Построенный сглаживающий полином служит для вычисления значений величины y в табличных точках t_1, \dots, t_n . Его применение позволяет хранить вместо n чисел y_1, \dots, y_n всего лишь m чисел s_1, \dots, s_m – коэффициенты полинома. При большой разнице между n и m экономия памяти может оказаться существенной.

Качество аппроксимации оценивается *среднеквадратической погрешностью*

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (s(k) - y_k)^2 \right)^{1/2}$$

(по построению сглаживающий полином минимизирует именно эту погрешность на множестве всех полиномов порядка m).

Серьезное предупреждение. Часто делаются попытки использовать сглаживающий полином для работы с ним *между* узлами таблицы. Не имея возможности запретить такого рода операции, хотим заранее снять с математики ответственность за возможное "качество" их результатов.

11.3. Сглаживание полиномами, ортогональными на сетке

Мы показали, что построение сглаживающего полинома на равномерной сетке сводится к нахождению нормального псевдорешения системы линейных уравнений

$$\tilde{T}s = y. \tag{11.3.1}$$

В п.10.3 указано, что нормальное псевдорешение этой системы является решением системы нормальных уравнений. Однако переход от системы (11.3.1) к системе нормальных уравнений невыгоден, как указано в том же п.10.3. Вот если бы столбцы матрицы \tilde{T} попарно ортогональны...

Но ведь мы знаем, как из линейно независимого набора векторов сделать ортогональный: следует применить алгоритм Грама–Шмидта!

Известно, что матрица Вандермонда

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \dots & n^{n-1} \end{bmatrix}$$

не вырождена. Следовательно, множество ее столбцов линейно независимо. Поэтому линейно независима и его часть – множество столбцов матрицы \tilde{T} . А любое линейно независимое множество векторов можно с помощью алгоритма Грама–Шмидта преобразовать в ортогональное.

Положим, согласно п.7.7, $F^{(1)} = E^{(1)} = [1, \dots, 1]^T$. Далее, положим $F^{(2)} = E^{(2)} - \alpha_{12}F^{(1)}$, где

$$\alpha_{12} = \frac{\langle E^{(2)}, F^{(1)} \rangle}{\langle F^{(1)}, F^{(1)} \rangle} = \frac{n+1}{2},$$

и т.д.

На языке полиномов этот процесс выглядит так.

Вектор $E^{(j)}$ – это значения полинома $e^{(j)}(t) = t^{j-1}$ на *стандартной сетке* $\{1, \dots, n\}$. Поэтому $F^{(j)}$ – значения на той же сетке полинома

$$f^{(j)}(t) = e^{(j)}(t) - \alpha_{1j}f^{(1)}(t) - \dots - \alpha_{j-1,j}f^{(j-1)}(t).$$

Например, $f^{(1)}(t) \equiv 1$, $f^{(2)}(t) = t - \frac{n+1}{2}$, и т.д.

Очевидно, что $f^{(j)}(t)$ – полином степени $j - 1$ со старшим коэффициентом, равным единице. Условие $\langle F^{(i)}, F^{(j)} \rangle = 0$, $i \neq j$ на языке полиномов запишется так:

$$\sum_{k=1}^n f^{(i)}(k) \cdot \overline{f^{(j)}(k)} = 0.$$

Определение. Если $p^{(i)}, p^{(j)} \in \mathcal{P}_n$ (полиномы порядка n), то их *скалярным произведением на стандартной сетке* называется число

$$\langle p^{(i)}, p^{(j)} \rangle = \sum_{k=1}^n p^{(i)}(k) \cdot \overline{p^{(j)}(k)}. \quad (11.3.2)$$

Замечание. Очевидно, что $\langle p, p \rangle \geq 0$ для любого $p \in \mathcal{P}_n$. Если $\langle p, p \rangle = 0$, то, очевидно, $p(k) = 0$ при $k = 1, \dots, n$, т.е. полином порядка n имеет по крайней мере n корней. Но полином с такими свойствами только один – нулевой. Итак, если $\langle p, p \rangle = 0$, то $p(t) = \theta(t)$.

Читателю предоставляется возможность самому проверить, что введенное на пространстве \mathcal{P}_n по формуле (11.3.2) "скалярное произведение" удовлетворяет и остальным аксиомам скалярного произведения.

Естественно назвать полиномы $f^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, *полиномами, ортогональными на стандартной сетке*. Они, очевидно, образуют базис пространства \mathcal{P}_n (ортогональный в смысле скалярного произведения (11.3.2)).

Будем теперь искать сглаживающий полином в виде линейной комбинации полиномов построенного базиса:

$$p(t) = p_1 f^{(1)}(t) + \dots + p_m f^{(m)}(t)$$

(так как степень полинома $f^{(j)}$ равна $j - 1$, $p(t)$ – полином порядка m).

Для определения коэффициентов имеем, аналогично предыдущему пункту, систему линейных уравнений

$$FP = y, \tag{11.3.3}$$

где $F = [F^{(1)}, \dots, F^{(m)}]$ – матрица размера $n \times m$ с попарно ортогональными столбцами, p – искомый вектор коэффициентов, y – вектор результатов измерений.

Умножим теперь (11.3.3) слева на F^* (перейдем к нормальным уравнениям):

$$(F^* F)P = F^* y.$$

Решение этой системы (с диагональной матрицей), согласно формулам (10.3.3), имеет вид

$$p_k = \frac{\langle y, F^{(k)} \rangle}{\|F^{(k)}\|^2}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Таким образом, при заготовленной заранее стандартной (при заданных n и m) матрице F построение сглаживающего полинома сводится фактически к умножению матрицы F^* на полученный в эксперименте столбец и делению координат столбца-произведения на также заранее заготовленные числа $\|F^{(k)}\|^2$.

Мы рассмотрели два способа построения сглаживающего полинома: с помощью сингулярного разложения матрицы коэффициентов системы и с помощью ортогональных на сетке полиномов.

И тот и другой способ требует выполнения большой подготовительной работы: в первом случае – построения сингулярного разложения, во втором – построения ортогональных на сетке полиномов. И та и другая операция поддерживается устойчивыми вычислительными алгоритмами, реализованными как в средах конечного пользователя, так и в библиотеках программ на Фортране.

Мы не будем пытаться дать сравнительную оценку рассмотренных методов. Отметим лишь два факта.

1. Если мы построили сглаживающий полином, но среднеквадратическая погрешность оказалась велика и следует увеличить порядок полинома, то в случае сингулярного разложения придется пересчитывать все заново. При использовании же ортогональных на сетке полиномов потребуется добавить лишь еще одно слагаемое – уже сосчитанные коэффициенты разложения сохраняются. Это – полезное свойство *ортогональных* систем функций.

2. При использовании сингулярного разложения сглаживающий полином получается в стандартной форме,

$$p(t) = a_1 + a_2t + \dots + a_mt^{m-1},$$

которая допускает применение схемы Горнера.

При использовании ортогональных на сетке полиномов сглаживающий полином получается в виде их линейной комбинации

$$p(t) = p_1f^{(1)}(t) + \dots + p_mf^{(m)}(t).$$

Не следует приводить подобные члены в правой части (преобразовывать этот полином в стандартную форму), так как существует простое обобщение схемы Горнера, позволяющее работать с полиномом, разложенными по ортогональным на сетке полиномам.

11.4. Дискретное преобразование Фурье

Идея построения сглаживающего полинома с помощью ортогональных на сетке полиномов может быть обобщена. В самом деле, кроме полиномов, существуют и другие системы "простых и удобных функций". В этом пункте мы рассмотрим одну такую систему.

Пусть $w^{(r)}(t) = \exp\left(i\frac{2\pi r}{n}t\right)$, $r = 1, \dots, n$. Покажем, что эти функции попарно ортогональны на стандартной сетке $\{1, \dots, n\}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\langle w^{(j)}, w^{(r)} \rangle &= \sum_{k=1}^n w^{(j)}(k) \cdot \overline{w^{(r)}(k)} = \sum_{k=1}^n \exp\left(i\frac{2\pi j}{n}k\right) \cdot \overline{\exp\left(i\frac{2\pi r}{n}k\right)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \exp\left(i\frac{2\pi}{n}(j-r)k\right) = \sum_{k=1}^n \left(\exp\left(i\frac{2\pi}{n}(j-r)\right)\right)^k.\end{aligned}$$

Если $j = r$, то $\exp\left(i\frac{2\pi}{n}(r-r)\right) = 1$, и, следовательно,

$$\langle w^{(r)}, w^{(r)} \rangle = n. \quad (11.4.1)$$

Если же $j \neq r$, то, просуммировав геометрическую прогрессию, имеем

$$\begin{aligned}\langle w^{(j)}, w^{(r)} \rangle &= \exp\left(i\frac{2\pi}{n}(j-r)\right) \cdot \frac{\left(\exp\left(i\frac{2\pi}{n}(j-r)\right)\right)^n - 1}{\exp\left(i\frac{2\pi}{n}(j-r)\right) - 1} = \\ &= \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{n}(j-r)\right)}{\exp\left(i\frac{2\pi}{n}(j-r)\right) - 1} \cdot \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{n}(j-r)\right) - 1\right) = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Замечание. Функции $w^{(r)}(t) = \exp\left(i\frac{2\pi r}{n}t\right)$ можно определить при всех $r \in \mathbb{Z}$, и если рассматривать их как функции, заданные на \mathbb{R} , то все они различны. Однако мы рассматриваем их *только на стандартной сетке*, поэтому $t \in \{1, \dots, n\}$ и

$$\exp\left(i\frac{2\pi(r+n)}{n}t\right) = \exp\left(i\left(\frac{2\pi r}{n}t + 2\pi t\right)\right) = \exp\left(i\frac{2\pi r}{n}t\right).$$

Таким образом, $w^{(r+n)}(t) = w^{(r)}(t)$, и любая функция $w^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}$, на стандартной сетке совпадает с одной из функций $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}$.

Отметим еще некоторые свойства рассматриваемых функций.

1. Функции $w^{(r)}$ n -периодичны по t :

$$\begin{aligned}w^{(r)}(t+n) &= \exp\left(i\frac{2\pi r}{n}(t+n)\right) = \\ &= \exp\left(i\left(\frac{2\pi r}{n}t + 2\pi r\right)\right) = \exp\left(i\frac{2\pi r}{n}t\right) = w^{(r)}(t).\end{aligned}$$

2. Функции $w^{(r)}$ и $w^{(n-r)}$ принимают на стандартной сетке комплексно сопряженные значения:

$$w^{(n-r)}(k) = w^{(-r)}(k) = \exp\left(-i\frac{2\pi r}{n}k\right) = \overline{w^{(r)}(k)}.$$

3. $w^{(n)}(k) \equiv w^{(0)}(k) \equiv 1$ при $k \in \mathbb{Z}$.

Сгладим теперь результаты наблюдений (п.11.2) линейной комбинацией функций $w^{(1)}, \dots, w^{(m)}$, $m \leq n$. Для определения коэффициентов q_1, \dots, q_m этой линейной комбинации получим систему линейных уравнений

$$y_k = q_1 w^{(1)}(k) + \dots + q_m w^{(m)}(k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (11.4.2)$$

В матричной форме система уравнений (11.4.2) имеет вид $Wq = y$, где

$$W = \begin{bmatrix} w^{(1)}(1) & \dots & w^{(m)}(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ w^{(1)}(n) & \dots & w^{(m)}(n) \end{bmatrix}$$

– $(n \times m)$ -матрица с попарно ортогональными столбцами.

Переходя к нормальным уравнениям, получим $(W^*W)q = W^*y$, или, учитывая (11.4.1), $\text{diag}[n, \dots, n] \cdot q = W^*y$. Отсюда

$$q = \frac{1}{n}W^*y, \quad \text{или} \quad q_r = \frac{1}{n}\langle y, w^{(r)} \rangle, \quad r = 1, \dots, m. \quad (11.4.3)$$

Если в сглаживании участвуют все функции ($m = n$), то нормальное псевдорешение превращается в решение – получаем разложение вектора в \mathbb{C}^n по ортогональному базису:

$$y_k = \sum_{r=1}^n q_r \exp\left(i\frac{2\pi r}{n}k\right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (11.4.4)$$

где

$$q_r = \sum_{k=1}^n y_k \exp\left(-i\frac{2\pi r}{n}k\right), \quad r = 1, \dots, n. \quad (11.4.5)$$

Формулы (11.4.4) и (11.4.5) задают так называемое *дискретное преобразование Фурье*⁶³, причем формула (11.4.5), с помощью которой определяются коэффициенты разложения q_r , называется *прямым преобразованием*, а формула (11.4.4), восстанавливающая исходный вектор y – *обратным преобразованием*.

⁶³Жан Батист Жозеф ФУРЬЕ (J.-B.-J. Fourier, 1768-1830) – французский математик, член Парижской АН, почетный член Петербургской АН.

Числа q_r называются *коэффициентами Фурье* вектора y или его *комплексным Фурье-спектром*. Отметим, что при аппроксимации *вещественного* вектора целесообразно выбирать попарно сопряженные на стандартной сетке функции $w^{(r)}$ (см. свойство 2).

Замечание. Так же, как при использовании ортогональных на сетке полиномов, при увеличении числа слагаемых в сглаживающей линейной комбинации уже сосчитанные коэффициенты q_r сохраняются.

11.5. Быстрое преобразование Фурье

Для вычисления одного коэффициента Фурье по формуле (11.4.5) или для восстановления одной компоненты исходного вектора по формуле (11.4.4) требуется (при готовой матрице W) выполнить n пар "условных операций" (умножение + сложение). Таким образом, весь процесс вычисления дискретного преобразования Фурье потребует выполнения n^2 условных операций. При $n \approx 10^7 - 10^8$ (а такие массивы в приложениях не редки) обработка результатов измерений становится недоступной для современных ЭВМ.

В этом пункте рассматривается одна из разновидностей так называемого *быстрого преобразования Фурье* (БПФ). Будем считать, что $n = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$.

Обозначим $z = \exp(i \frac{2\pi}{n})$. Тогда, очевидно, $z^{n/2} = -1$, $z^n = 1$.

Формула (11.4.4) примет вид

$$y_k = \sum_{r=1}^n q_r z^{kr}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11.5.1)$$

Соберем в правой части (11.5.1) отдельно слагаемые с четными и с нечетными номерами (по предположению $n = 2^p$ – четное число):

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{r=1}^{n/2} (q_{2r} z^{2kr} + q_{2r-1} z^{k(2r-1)}) = \\ &= \sum_{r=1}^{n/2} (q_{2r} z^{2kr} + z^{-k} q_{2r-1} z^{2kr}) = x_k^{(e)} + z^{-k} x_k^{(o)}, \end{aligned} \quad (11.5.2)$$

где

$$x_k^{(e)} = \sum_{r=1}^{n/2} q_{2r} (z^2)^{kr}, \quad x_k^{(o)} = \sum_{r=1}^{n/2} q_{2r-1} (z^2)^{kr}. \quad (11.5.3)$$

Очевидно, что при $k = 1, \dots, n/2$

$$x_{k+n/2}^{(e)} = \sum_{r=1}^{n/2} q_{2r} z^{2(k+n/2)r} = \sum_{r=1}^{n/2} q_{2r} z^{nr} (z^2)^{kr} = x_k^{(e)}$$

и, аналогично, $x_{k+n/2}^{(o)} = x_k^{(o)}$.

Формулы (11.5.3) показывают, что столбцы $x_k^{(e)}$ и $x_k^{(o)}$ (высоты $n/2$) являются дискретными Фурье-образами столбцов, составленных соответственно из четных и нечетных компонент столбца q .

Преобразуем формулу (11.5.2):

$$\begin{cases} y_k = x_k^{(e)} + z^{-k} x_k^{(o)}, \\ y_{k+n/2} = x_{k+n/2}^{(e)} + z^{-n/2} z^{-k} x_{k+n/2}^{(o)} = x_k^{(e)} - z^{-k} x_k^{(o)}, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n/2.$$

Видно, что для получения столбца y (высоты n) достаточно вычислить столбцы $x_k^{(e)}$ и $x_k^{(o)}$ (высоты $n/2$) и выполнить еще n условных операций.

Обозначим $f(p)$ количество условных операций, необходимых для вычисления дискретного преобразования Фурье столбца высоты $n = 2^p$. Тогда

$$f(p) = 2 \cdot f(p-1) + 2^p.$$

Учитывая, что $f(0) = 0$, методом математической индукции несложно убедиться (проверьте это!), что

$$f(p) = p \cdot 2^p = n \cdot \log_2(n).$$

При $n = 2^{24} \approx 1.7 \cdot 10^7$ имеем $n \cdot \log_2(n) = 24 \cdot 2^{24} < 4.1 \cdot 10^8$ – при помощи БПФ вычисления выполняются за несколько секунд, в то время как $n^2 = 2^{48} > 2.8 \cdot 10^{14}$ – без использования БПФ требуемое время увеличивается почти в 10^6 раз!

Алгоритм БПФ реализован в средах конечного пользователя и в библиотеках Фортран-программ. Имеются варианты алгоритма, в которых высота столбца не обязана быть степенью двойки.

Глава 12. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Терминологическое замечание. Мы считаем необходимым отметить, что следует различать *программирование*, т.е. составление компьютерных программ, и *математическое программирование*, т.е. исследование и решение задач оптимизации (минимизации или максимизации) вещественного функционала, заданного на \mathbb{R}^n или на его части.

Частный случай математического программирования есть *линейное программирование* – оптимизация *линейного* функционала на части \mathbb{R}^n , заданной *линейными* равенствами или неравенствами.

Линейное программирование ведет свою историю от работы Л.В. Канторовича⁶⁴, выполненной в 1938 году.

12.1. Одна содержательная задача

Описание проблемы, которой посвящена эта глава, мы начнем с простейшего примера.

Коммерсант, выехавший для закупки двух видов товара, имеет 18 денежных единиц (д.е.)⁶⁵, его автомобиль может вместить 10 единиц массы (е.м.). Одна е.м. товара первого вида стоит 1 д.е., второго вида – 3 д.е. При продаже 1 е.м. товара первого вида коммерсант рассчитывает получить 0.5 д.е. прибыли, при продаже 1 е.м. товара второго вида – 0.75 д.е. Как распределить имеющиеся деньги и вместимость автомобиля, чтобы ожидаемая прибыль была максимальной?

Пусть x_1 – закупаемое коммерсантом количество товара первого вида, x_2 – второго вида. Эти переменные должны удовлетворять следующим очевидным неравенствам:

- 1) $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ (количества товаров неотрицательны);
- 2) $x_1 + 3x_2 \leq 18$ (сумма затрат не может превышать наличность);
- 3) $x_1 + x_2 \leq 10$ (суммарная масса закупленных товаров не может превышать вместимость автомобиля).

На части \mathbb{R}^2 , где выполнены все эти неравенства, требуется найти наибольшее значение линейного функционала

⁶⁴Леонид Витальевич КАНТОРОВИЧ (1912-1986) – советский математик и экономист, лауреат Нобелевской премии, член АН СССР и ряда зарубежных академий, один из основоположников математической экономики.

⁶⁵Мы намеренно не уточняем, о каких единицах идет речь, чтобы сохранить коммерческую тайну.

$$f(x) = 0.5x_1 + 0.75x_2.$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию нашей задачи. Множество, задаваемое одним линейным неравенством, представляет собой полуплоскость в \mathbb{R}^2 (см. п.9.1). Множество, задаваемое системой неравенств 1)-3), есть выпуклый⁶⁶ четырехугольник (см. рис.12.1).

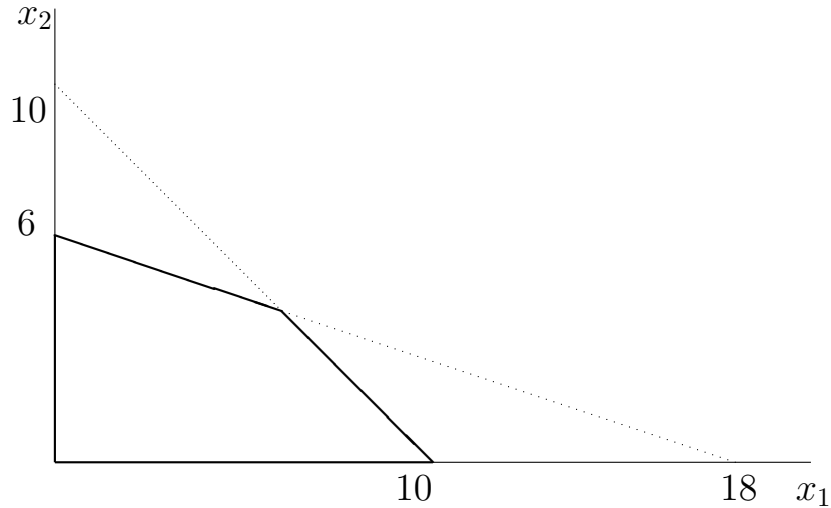


Рис.12.1

Линии уровня функционала f – это семейство параллельных прямых (все они перпендикулярны направленному отрезку, соответствующему вектору $[0.5, 0.75]^T$, см. п.9.1). Из прямых этого семейства, пересекающих наш четырехугольник, следует выбрать ту, которая соответствует наибольшему значению f . Из рис.12.2 видно, что глобальный максимум f достигается в вершине четырехугольника с координатами $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, и $f_{max} = 0.5 \cdot 6 + 0.75 \cdot 4 = 6$.

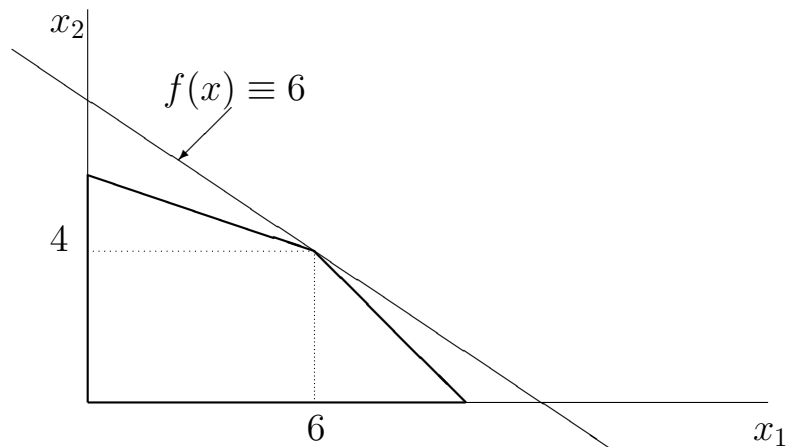


Рис.12.2

⁶⁶Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит соединяющий эти точки отрезок.

12.2. Каноническая задача линейного программирования

Обобщим пример, рассмотренный в предыдущем пункте. Задача линейного программирования состоит в поиске *глобального минимума* (наименьшего значения) линейного функционала

$$f(x) = \langle x, c \rangle = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (12.2.1)$$

на части \mathbb{R}^n , все точки которой удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k, \quad k = 1, \dots, m1; \quad (12.2.2)$$

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \quad k = m1 + 1, \dots, m2; \quad (12.2.3)$$

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \geq b_k, \quad k = m2 + 1, \dots, m. \quad (12.2.4)$$

Сделаем необходимые уточнения.

1. Существуют содержательные задачи (см. п.12.1), в которых функционал нужно не минимизировать, а максимизировать. Этот вариант, очевидно, укладывается в нашу схему при помощи замены вектора c на противоположный. Иначе говоря, *максимизация* функционала $f(x) = \langle x, c \rangle$ – это то же, что *минимизация* функционала $\varphi(x) = \langle x, -c \rangle$.

2. Мы будем считать все переменные неотрицательными ($x_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$) и выделим эти неравенства в особую группу. Покажем, что это условие не является стесняющим. Действительно, если переменная x_k ограничена снизу ($x_k \geq p$), можно ввести новую переменную по формуле $x_k^+ = x_k - p \geq 0$. Если переменная x_k ограничена сверху ($x_k \leq p$), можно ввести новую переменную по формуле $x_k^+ = p - x_k \geq 0$. Если, наконец, переменная x_k не ограничена ни сверху, ни снизу, положим (увеличивая количество переменных) $x_k = x_k' - x_k''$, где $x_k' \geq 0$, $x_k'' \geq 0$.

Множество векторов из \mathbb{R}^n с *неотрицательными* координатами будем обозначать \mathbb{R}_+^n .

3. Мы будем считать все свободные члены в системе (12.2.2)–(12.2.4) неотрицательными ($b \in \mathbb{R}_+^m$). Этому всегда можно добиться, умножая при необходимости уравнение или неравенство на (-1) .

Можно показать, что часть \mathbb{R}^n , задаваемая системой (12.2.2)–(12.2.4), есть

- 1) либо пустое множество (система несовместна),
- 2) либо точка,
- 3) либо выпуклый многогранник:

- а) *ограниченный* (пример – рис.12.3),
 б) *неограниченный* (пример – рис.12.4).

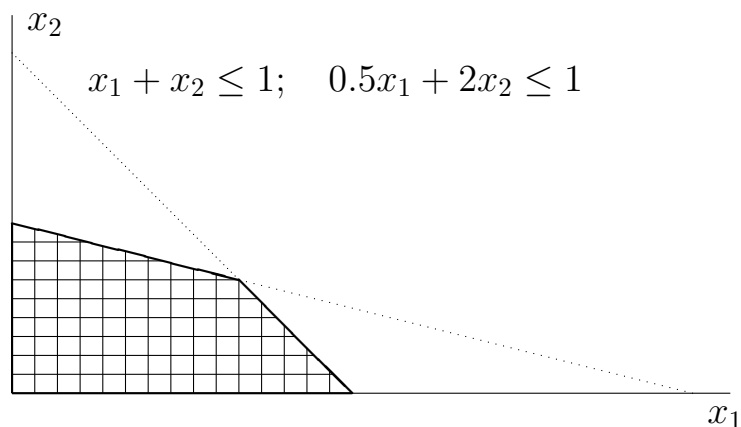


Рис.12.3

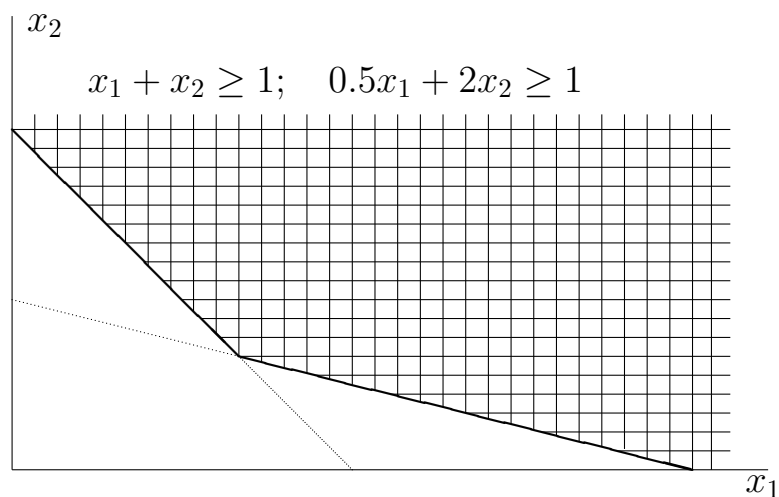


Рис.12.4

В случае **1** задача линейного программирования не имеет решения;
 В случае **2** решением задачи линейного программирования является, очевидно, единственное решение системы. Оба эти случая тривиальны.

Интерес представляет случай **3**.

В случае **3а)** рассуждением, подобным проведенному в п.12.1, *можно показать, что* глобальный минимум функционала существует и достигается хотя бы в одной из вершин многогранника.

В случае **3б)** возможны два варианта: либо множество значений функционала не ограничено снизу, либо минимум существует и также достигается в одной из вершин многогранника.

Покажем теперь, что все ограничения-*неравенства*, кроме неравенств $x_k \geq 0$, можно заменить ограничениями-*равенствами* (за счет увеличения количества переменных в задаче).

Действительно, можно ввести новую переменную $x_{n+1} \geq 0$ и заменить неравенство (12.2.2) на уравнение

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n + x_{n+1} = b_k,$$

из которого следует (12.2.2).

Аналогично, вводя новую переменную $x_{n+1} \geq 0$, можно заменить неравенство (12.2.4) на уравнение

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n - x_{n+1} = b_k,$$

из которого следует (12.2.4).

Конечно, дополнительные переменные не должны входить в минимизируемый функционал (соответствующие координаты вектора c должны равняться нулю).

Сформулируем теперь так называемую *каноническую задачу линейного программирования*:

Минимизировать линейный функционал (12.1.1) на части \mathbb{R}_+^n , все точки которой удовлетворяют системе линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{12.2.5}$$

где A – матрица размера $m \times n$, а $b \in \mathbb{R}_+^m$.

Замечания. 1. Мы считаем, что система (12.2.5) имеет бесконечно много решений в \mathbb{R}_+^n , иначе задача тривиальна. Можно также полагать, что ни одно из уравнений не является следствием других (иначе его можно просто вычеркнуть). Отсюда, кстати, следует, что $m < n$.

2. Мы по-прежнему обозначаем буквой n размерность пространства (число переменных) и буквой m – количество ограничений-равенств. Следует, однако, помнить, что теперь количество переменных может быть *больше*, чем в исходной задаче – за счет дополнительных переменных, появляющихся при замене ограничений-неравенств равенствами. Количество ограничений может оказаться *меньше*, чем в исходной задаче – за счет вычеркивания уравнений, являющихся следствием оставшихся.

12.3. Преобразование канонической задачи линейного программирования

Из замечания 1 в конце п.12.2 следует, что при решении системы (12.2.5) методом Гаусса–Йордана количество уравнений не уменьшается.

Поэтому значения некоторых m переменных однозначно определяются значениями оставшихся $n - m$ переменных, а те могут быть заданы произвольно (здесь мы пока не учитываем ограничения $x \in \mathbb{R}_+^n$). Отметим также, что указанные выше m переменных можно выбрать не единственным образом. Мы будем для удобства считать, что эти m переменных – x_1, \dots, x_m .

Разобьем матрицу A , вектор c и переменный вектор x на две части:

$$A = [B \mid N], \quad c = \begin{bmatrix} c^B \\ \dots \\ c^N \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^B \\ \dots \\ x^N \end{bmatrix}.$$

Здесь B – квадратная матрица порядка m ; N – $m \times (n - m)$ -матрица; x^B , c^B – столбцы высоты m ; x^N , c^N – столбцы высоты $n - m$.

Теперь система (12.2.5) переписется в виде

$$Bx^B + Nx^N = b, \tag{12.3.1}$$

а функционал (12.2.1) – в виде

$$f(x) = (c^B)^T \cdot x^B + (c^N)^T \cdot x^N. \tag{12.3.2}$$

Поскольку система (12.3.1) при каждом значении x^N *однозначно* разрешима относительно x^B , то матрица B обратима, и мы получаем

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Nx^N. \tag{12.3.3}$$

Подставляя полученный результат в (12.3.2), имеем

$$f(x) = (c^B)^T \cdot B^{-1}b + ((c^N)^T - (c^B)^T \cdot B^{-1} \cdot N) \cdot x^N.$$

Введем следующие обозначения:

$\beta = B^{-1}b$ (столбец высоты m),

$\pi = (c^N)^T - (c^B)^T \cdot B^{-1} \cdot N$ (строка ширины $n - m$).

Тогда получим так называемую *преобразованную задачу* линейного программирования:

Минимизировать функционал

$$\varphi(x^N) = (c^B)^T \cdot \beta + \pi \cdot x^N \tag{12.3.3}$$

при условиях

$$x^N \in \mathbb{R}_+^{n-m}, \quad x^B = \beta - B^{-1} \cdot N \cdot x^N \in \mathbb{R}_+^m. \tag{12.3.4}$$

Координаты вектора x^B принято называть *базисными* переменными, координаты вектора x^N – *небазисными*. Решение системы $Ax = b$ называется *базисным*, если $x^N = \theta_{n-m}$ ($x^B = \beta$). Базисное решение называется *допустимым*, если $x^B = \beta \in \mathbb{R}_+^m$. Если базисное решение допустимо, и $\pi^T \in \mathbb{R}_+^{n-m}$, то это базисное решение доставляет функционалу искомый минимум, так как при $x^N \in \mathbb{R}_+^{n-m}$

$$\varphi(x^N) = (c^B)^T \cdot \beta + \pi \cdot x^N \geq (c^B)^T \cdot \beta = \varphi(\theta_{n-m}).$$

Замечание. Столбец β и строка π зависят от выбора базисных переменных. Напомним, что этот выбор можно произвести не единственным образом.

Пример. Минимизировать функционал

$$f(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Здесь $n = 3$, $m = 1$, $A = [1, 2, 3]$, $b = [6]$, $c = [3, 1, 2]^T$.

Если за базисную переменную принять x_1 , то

$$B = [1], \quad N = [2, 3], \quad \beta = [6], \quad \pi = [1, 2] - 3 \cdot [2, 3] = [-5, -7].$$

Базисное решение $[6, 0, 0]^T$ допустимо.

Если за базисную переменную принять x_3 , то

$$B = [3], \quad N = [1, 2], \quad \beta = [2], \quad \pi = [3, 1] - \frac{2}{3} \cdot [1, 2] = \left[\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right].$$

Базисное решение $[0, 0, 2]^T$ также допустимо.

Если, наконец, за базисную переменную принять x_2 , то

$$B = [2], \quad N = [1, 3], \quad \beta = [3], \quad \pi = [3, 2] - \frac{1}{2} \cdot [1, 3] = \left[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Базисное решение $[0, 3, 0]^T$ допустимо и доставляет минимум функционалу, так как $\pi^T \in \mathbb{R}_+^2$.

Проиллюстрируем наш пример геометрически. Система ограничений, состоящая из одного уравнения $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$, задает плоскость в \mathbb{R}^3 . Пересечение этой плоскости с \mathbb{R}_+^3 – треугольник (рис.12.5). Легко видеть, что допустимые базисные решения $[6, 0, 0]^T$, $[0, 3, 0]^T$, $[0, 0, 2]^T$

соответствуют вершинам этого треугольника. Как уже указывалось, минимальное значение функционала f достигается хотя бы в одной из вершин. Сравнив значения функционала во всех вершинах $f(6, 0, 0) = 18$, $f(0, 3, 0) = 3$, $f(0, 0, 2) = 4$, видим, что базисное решение $[0, 3, 0]^T$ действительно доставляет функционалу глобальный минимум.

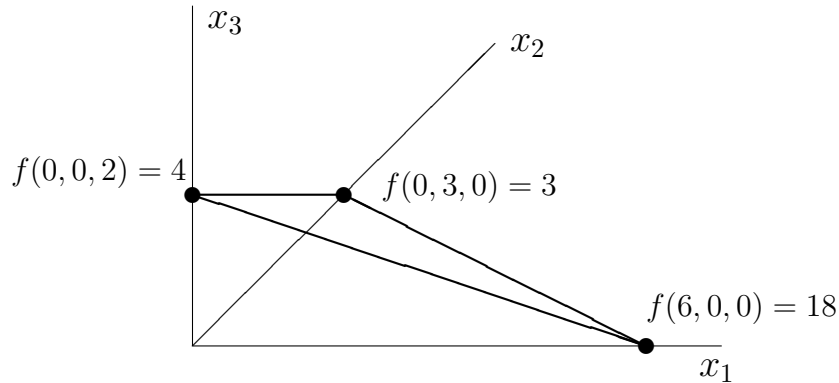


Рис.12.5

12.4. Понятие о симплекс-методе решения задачи линейного программирования

Этот метод, открытый в 1947 году Д. Данцигом⁶⁷, представляет собой *конечный* алгоритм, который, начиная с некоторого *допустимого базисного* решения, строит новые *допустимые базисные решения*, обеспечивая *уменьшение* значения функционала.

Мы опишем один шаг симплекс-метода, не вдаваясь, естественно, в технологические подробности.

Итак, пусть имеется допустимое базисное решение

$$x = \begin{bmatrix} x^B \\ \dots \\ x^N \end{bmatrix}, \quad x^B = \beta \in \mathbb{R}_+^m, \quad x^N = \theta_{n-m}.$$

Вычислим строку π , соответствующую нашему базисному решению. Если $\pi^T \in \mathbb{R}_+^{n-m}$, то, как указано в п.12.3, минимум функционала φ достигнут, и задача линейного программирования решена. *Работа алгоритма заканчивается.*

Если среди элементов строки π есть отрицательные, то, увеличивая соответствующие им координаты вектора x^N , мы будем уменьшать значение функционала. Скорость убывания функционала пропорциональна значениям отрицательных элементов строки π . Поэтому выберем

⁶⁷Джордж Бернард ДАНЦИГ (J.V. Dantzig, 1914-2005) – американский математик.

из них наименьший (наибольший по модулю). Пусть его порядковый номер q . Будем увеличивать q -ю координату вектора x^N , пока все координаты вектора x^B еще неотрицательны. Поскольку отлична от нуля только одна координата вектора x^N , (12.3.4) принимает вид

$$x^B = B^{-1}b - (B^{-1}N)^{(q)} x_q^N.$$

Если все элементы столбца $(B^{-1}N)^{(q)}$ *неположительны*, то координаты вектора x^B остаются неотрицательными при *любых положительных* значениях x_q^N . Это значит, что множество значений функционала φ не ограничено снизу, и задача не имеет решения. *Работа алгоритма заканчивается.*

Если среди элементов столбца $(B^{-1}N)^{(q)}$ есть *положительные*, то соответствующие им координаты вектора x^B будут убывать с увеличением x_q^N . Пусть s – номер той координаты вектора x^B , которая *первой обратится в нуль* в этом процессе. Тогда наибольшее возможное значение x_q^N равно

$$\max(x_q^N) = \frac{\beta_s}{(B^{-1}N)_s^{(q)}} = \min_j \left(\frac{\beta_j}{(B^{-1}N)_j^{(q)}} \right)$$

(минимум берется по тем индексам j , для которых $(B^{-1}N)_j^{(q)} > 0$).

При этом значении x_q^N получим $x_s^B = 0$. Теперь переменная x_q^N включается в состав базисных, а обнуленная переменная x_s^B исключается.

Дальнейшие действия можно было бы представить себе так: меняем местами столбцы $B^{(s)}$ и $N^{(q)}$ в матрице A и соответствующие координаты вектора s . Получим "новые" матрицы B и N . Вычислим новый вектор β и новую строку π . На полученном новом *допустимом* ($x^B = \beta \in \mathbb{R}_+^m$) *базисном* ($x^N = \theta_{n-m}$) решении функционал φ *по построению* имеет *меньшее* значение, чем на старом. *Один шаг алгоритма закончен.*

Замечание. Конечно, изложенная процедура неэффективна. Стандартные программы, реализующие алгоритм симплекс-метода, работают иначе. Но мы, напоминая, не рассматриваем технические подробности.

Поскольку количество допустимых базисных решений не превосходит количества различных наборов базисных переменных, а оно, в свою очередь, не превосходит количества сочетаний из n столбцов матрицы A по m , т.е. $\frac{n!}{m!(n-m)!}$, то за конечное число шагов алгоритм либо находит глобальный минимум функционала, либо выявляет его отсутствие.

12.5. Построение начального допустимого базисного решения

Для начала работы алгоритма симплекс-метода необходимо иметь какое-нибудь допустимое базисное решение. Мы опишем один из возможных способов его построения.

Пусть требуется минимизировать функционал $f(x) = \langle x, c \rangle$ при условиях

$$x \in \mathbb{R}_+^n, \quad Ax = b \in \mathbb{R}_+^m. \quad (12.5.1)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу о минимизации линейного функционала $\varphi(x, y) = y_1 + \dots + y_m$ при условиях

$$x \in \mathbb{R}_+^n, \quad y \in \mathbb{R}_+^m, \quad [A : I_m] \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ y \end{bmatrix} = b. \quad (12.5.2)$$

Для задачи (12.5.2) одно допустимое базисное решение очевидно: $x = \theta_n$, $y = b$. Поэтому можно применить к ней симплекс-метод.

Поскольку $\varphi(x, y) \geq 0$, функционал φ ограничен снизу, и алгоритм за конечное число шагов даст решение вспомогательной задачи (\tilde{x}, \tilde{y}) .

Если окажется, что $\tilde{y} = \theta_m$, то \tilde{x} – допустимое базисное решение системы $Ax = b$ (проверьте это!).

Если же $\tilde{y} \neq \theta_m$, то минимум во вспомогательной задаче положителен ($\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$). Но если для вектора x выполнены условия (12.5.1), то пара (x, θ_m) удовлетворяет условиям (12.5.2), и $\varphi(x, \theta_m) = 0$, т.е. минимум во вспомогательной задаче равен нулю. Поэтому результат $\tilde{y} \neq \theta_m$ указывает на *несовместность* условий (12.5.1), и исходная задача не имеет решения.

Глава 13. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ

13.1. Предварительные замечания

В предыдущих главах мы предполагали, что все исходные данные рассматриваемых задач заданы точно, и точно выполняются арифметические операции. Однако в действительности и в исходных данных обычно имеется неопределенность (так как они являются, как правило, либо результатами измерений, либо результатами вычислений), и арифметические операции выполняются либо с округлением, либо с усечением. Это приводит к появлению в результатах неопределенности, без оценки которой пользоваться этими результатами нельзя. Могут появляться и несуществующие на самом деле "решения" задач.

Пример. Попробуем решить очевидно несовместную систему

$$\begin{cases} 7x + 9y = 16 \\ 14x + 18y = 33 \end{cases}$$

методом Гаусса–Йордана без выбора ведущего элемента (вычисления ведутся с тремя значащими цифрами):

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 7. & 9. & 16. \\ 14. & 18. & 33. \end{array} \right] & \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 1.29 & 2.29 \\ 14. & 18. & 33. \end{array} \right] & \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 1.29 & 2.29 \\ 0. & -1 & .9 \end{array} \right] & \iff \\ & \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 1.29 & 2.29 \\ -0. & 1.00 & -9.00 \end{array} \right] & \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 0. & 13.9 \\ -0. & 1.00 & -9.00 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Получено "решение": $x = 13.9$, $y = -9.00$.

Для тех, кто думает, что такой эффект возможен только при решении "вручную приводим пример решения несовместной (проверьте это!) системы с помощью среды конечного пользователя MAPLE:

```
> restart: with(linalg):  
  
Warning, the protected names norm and trace  
have been redefined and unprotected  
> fsolve({777777777777.*x+999999999999.*y=1777777777776,  
> 155555555554*x+19999999998*y=177777777777},{x,y});  
{x = -0.4444444445 1010, y = 0.3456790126 1010}
```

Проиллюстрируем проблему геометрически. Как известно, линейное алгебраическое уравнение с двумя переменными задает на плоскости прямую, а система из двух таких уравнений – пару прямых. Если матрица коэффициентов системы невырождена, то прямые непараллельны

и имеют единственную точку пересечения, координаты которой – единственное решение системы (рис.13.1).

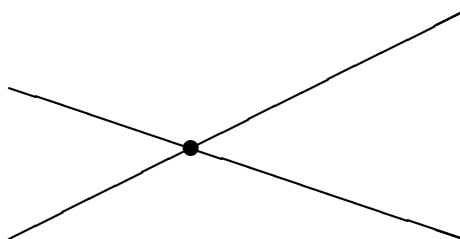


Рис.13.1

Наличие неопределенности в исходных данных (коэффициентах и свободных членах системы) превращает каждую прямую в целое семейство прямых. В простейшем случае, когда неопределенность содержится только в свободных членах, прямые каждого семейства параллельны между собой, и каждое уравнение системы порождает "толстую" прямую (полосу), толщина которой растет с ростом неопределенности. "Решением" системы теперь является пересечение двух "толстых" прямых – "толстая" точка, размеры которой характеризуют неопределенность решения.

Если матрица коэффициентов системы ортогональна, то прямые перпендикулярны, и размеры "решения" будут того же порядка, что и ширина полос (рис.13.2).

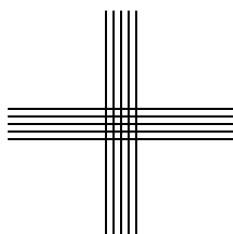


Рис.13.2

Если угол между полосами близок к нулю, то размеры "решения" могут во много раз превышать ширину полос (рис.13.3).

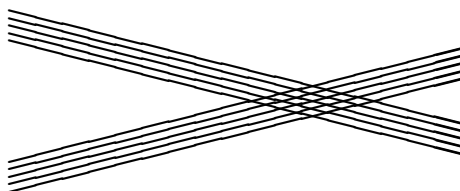


Рис.13.3

При параллельных прямых может возникнуть "решение не существующее в точной арифметике" (рис.13.4).

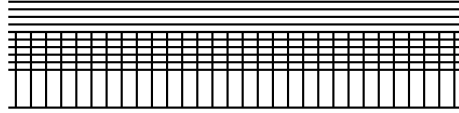


Рис.13.4

Эти геометрические построения показывают (хотя и не доказывают), что "плохими" являются системы, близкие к вырожденным. Чтобы придать этому утверждению точный смысл, нам потребуется ввести некоторые новые понятия.

13.2. Норма матрицы

Для квадратичной формы, порожденной эрмитовой матрицей A , известно неравенство (см. п.9.2)

$$\langle Ax, x \rangle \leq \lambda_{max} \cdot \|x\|^2, \quad (13.2.1)$$

где λ_{max} – наибольшее собственное число матрицы A .

Пусть теперь B – произвольная матрица размера $m \times n$. Из (13.2.1) следует, что

$$\|Bx\|^2 = \langle Bx, Bx \rangle = \langle B^* Bx, x \rangle \leq \sigma_{max}^2 \cdot \|x\|^2,$$

или

$$\|Bx\| \leq \sigma_{max} \cdot \|x\|, \quad (13.2.2)$$

где σ_{max} – наибольшее сингулярное число матрицы B . Если вектор x ненулевой, то, разделив на его норму обе части (13.2.2), получим

$$\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \sigma_{max}. \quad (13.2.3)$$

Покажем, что в (13.2.3) равенство достигается. Если v – правый, а u – левый сингулярные векторы, соответствующие наибольшему сингулярному числу, то (см. (10.1.4)):

$$\|Bv\| = \|\sigma_{max}u\| = \sigma_{max} = \sigma_{max}\|v\|, \quad \text{и} \quad \frac{\|Bv\|}{\|v\|} = \sigma_{max}.$$

Геометрическая интерпретация неравенства (13.2.3) очевидна: при умножении ненулевого вектора на матрицу слева евклидова норма этого вектора изменяется. Норма вектора в \mathbb{R}^3 – это длина соответствующего ему направленного отрезка. Поэтому естественно назвать отношение

$\frac{\|Bx\|}{\|x\|}$ "коэффициентом растяжения" вектора этой матрицей. Тогда неравенство (13.2.3) показывает, что коэффициент растяжения для каждой матрицы не может быть больше, чем ее наибольшее сингулярное число.

Определение. *Нормой* матрицы называется число

$$\|B\| = \max_{x \neq \theta} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sigma_{max}. \quad (13.2.4)$$

Установим свойства матричной нормы:

1. $\|B\| \geq 0$; $\|B\| = 0 \Leftrightarrow B = \Theta$ – нулевой оператор (матрица).
2. $\|\alpha B\| = |\alpha| \cdot \|B\|$.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
4. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
5. $\|B^*\| = \|B\|$.
6. Если B – обратимая матрица, то $\|B^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_{min}(B)}$.
7. Норма неотрицательно определенной матрицы равна ее наибольшему собственному числу.
8. Норма унитарной матрицы равна единице.

Доказательство. 1. Из определения матричной нормы следует, что $\|B\| \geq 0$. Далее, очевидно, $\|\Theta\| = 0$. С другой стороны, если $\|B\| = 0$, то для всех $x \in \mathbb{C}^n$ имеем $\|Bx\| = 0$, т.е. $Bx = \theta$. Таким образом, $B = \Theta$.

$$2. \|\alpha B\| = \max_{x \neq \theta} \frac{\|\alpha Bx\|}{\|x\|} = |\alpha| \cdot \max_{x \neq \theta} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = |\alpha| \cdot \|B\|.$$

3. Для любого $x \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\begin{aligned} \|(A + B)x\| &= \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|A + B\| = \max_{x \neq \theta} \frac{\|(A + B)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq \theta} \frac{(\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|.$$

4. Для любого $x \in \mathbb{C}^n$

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|.$$

Поэтому

$$\|AB\| = \max_{x \neq \theta} \frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq \theta} \frac{\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|.$$

5. В п.10.1 доказано, что ненулевые собственные числа матриц B^*B и BB^* совпадают. Поэтому $\|B^*\| = \sigma_{\max}(B^*) = \sigma_{\max}(B) = \|B\|$.

6. Пусть σ – сингулярное число матрицы B . Тогда σ^2 – собственное число матриц B^*B и BB^* . Отсюда $\frac{1}{\sigma^2}$ – собственное число матрицы $(BB^*)^{-1} = (B^{-1})^*B^{-1}$, т.е. $\frac{1}{\sigma}$ – сингулярное число матрицы B^{-1} . Следовательно,

$$\sigma_{\max}(B^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(B)}.$$

7. В п.10.1 доказано, что для неотрицательно определенной матрицы сингулярные числа совпадают с собственными числами.

8. Если U – унитарная матрица, то $U^*U = I$, и все сингулярные числа равны единице. ■

Отметим, что свойства **1 – 3** матричной нормы совпадают со свойствами нормы вектора (п.7.2).

Замечание. Мы использовали в определении (13.2.4) *евклидову* норму вектора. Поэтому полное наименование введенной матричной нормы – *норма, подчиненная евклидовой норме вектора*.

Мы уже отмечали ранее (п.7.2), что норму вектора в линейном пространстве можно вводить различными способами. Соответственно появятся различные нормы матрицы. Если в двух конечномерных линейных пространствах X и Y введены нормы $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно, то любому линейному оператору $B : X \rightarrow Y$ можно сопоставить число

$$\|B\|_{X \rightarrow Y} = \max_{x \neq \theta} \frac{\|Bx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Это число называют *нормой оператора*. Любая операторная норма обладает свойствами **1 – 4**, доказанными для нормы (13.2.4).

13.3. Трансформированная погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений.

Число обусловленности матрицы

Решение любой вычислительной задачи можно записать формулой

$$y = F(x).$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^n$ – вектор исходных данных, $y \in \mathbb{C}^m$ – вектор результатов, F – отображение, действующее из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m .

В реальной ситуации вектор x содержит неопределенность, т.е. "на вход" подается не вектор x , а некоторый другой вектор \tilde{x} . Точно так же отображение реализуется неточно, т.е. фактически работает некоторое другое отображение \tilde{F} . Таким образом, вместо требуемого результата y мы получаем "на выходе" некоторый другой результат \tilde{y} . Обозначив $\tilde{y} = F(\tilde{x})$, можно записать

$$\Delta y = \tilde{y} - y = (\tilde{y} - \tilde{y}) + (\tilde{y} - y) = (\tilde{F}(\tilde{x}) - F(\tilde{x})) + (F(\tilde{x}) - F(x)).$$

Мы представили погрешность результата в виде суммы двух слагаемых. При этом $\Delta y_T = F(\tilde{x}) - F(x)$ – погрешность, возникающая при точной реализации вычислительного алгоритма из-за погрешности в исходных данных, а $\Delta y_M = \tilde{F}(\tilde{x}) - F(\tilde{x})$ – погрешность, возникающая из-за неточной реализации алгоритма.

Существуют различные наименования для этих составляющих. Мы будем называть Δy_T *трансформированной погрешностью*, а Δy_M – *погрешностью метода*.

Анализ погрешностей решения системы линейных алгебраических уравнений начнем с простейшего случая.

Пусть в системе

$$Ax = b \tag{13.3.1}$$

невырожденная $n \times n$ -матрица A известна точно, и все арифметические операции выполняются без округлений и усечений, а свободный член содержит погрешность Δb , т.е. фактически вместо системы (13.3.1) решается система

$$A\tilde{x} = b + \Delta b.$$

Вычитая из этого уравнения (13.3.1), получим

$$A \cdot (\tilde{x} - x) = \Delta b, \quad \text{или} \quad \Delta x = A^{-1} \cdot \Delta b, \tag{13.3.2}$$

где $\Delta x = \tilde{x} - x$ – трансформированная погрешность решения.

По свойствам матричной нормы из (13.3.1) и (13.3.2) имеем

$$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|; \quad \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$$

Перемножив эти неравенства, получим

$$\|b\| \cdot \|\Delta x\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|x\|,$$

т.е.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Введя понятие относительной погрешности

$$\delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}, \quad \delta b = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

придем к основному неравенству

$$\delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta(b), \quad (13.3.3)$$

где $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ – так называемое *число обусловленности* матрицы A .

Из (13.3.3) видно, что относительная погрешность результата при точно известной матрице и точном выполнении арифметических операций может превысить относительную погрешность исходных данных не более, чем в $\text{cond}(A)$ раз.

Покажем, что в (13.3.3) может достигаться равенство. Если x , Δx – *нормированные* правые сингулярные векторы матрицы A , причем x соответствует наибольшему сингулярному числу, а Δx – наименьшему, то

$$\|x\| = 1, \quad \|\Delta x\| = 1, \quad \delta x = 1;$$

$$\|b\| = \|Ax\| = \sigma_{max}, \quad \|\Delta b\| = \|A\Delta x\| = \sigma_{min}, \quad \delta b = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}};$$

$$\frac{\delta x}{\delta b} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

Результат, очевидно, не изменится, если x и Δx не совпадают с сингулярными векторами, а лишь коллинеарны им.

Таким образом, число обусловленности матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений – это наибольшее значение "коэффициента усиления" относительной погрешности в задании свободного члена. При решении "плохо обусловленной" системы, т.е. системы, матрица коэффициентов которой имеет большое число обусловленности, может происходить (даже при точной арифметике!) катастрофическая потеря точности.

Из сказанного видно, что число обусловленности матрицы может служить мерой близости ее к вырожденной. Формально можно считать, что для вырожденной матрицы $\text{cond}(A) = +\infty$.

Покажем, как можно конструировать плохо обусловленные системы.

Пример. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{bmatrix}$ ($N > 0$) имеем

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 + N^2 & N \\ N & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{A^*A}(\lambda) = \lambda^2 - (N^2 + 2)\lambda + 1,$$

$$\lambda_{\max}(A^*A) = \frac{N^2 + 2 + N \cdot \sqrt{N^2 + 4}}{2} > N^2 + 1, \quad \lambda_{\min}(A^*A) = \frac{1}{\lambda_{\max}(A^*A)},$$

$$\text{cond}(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)} = \left(\frac{\lambda_{\max}(A^*A)}{\lambda_{\min}(A^*A)} \right)^{1/2} = \lambda_{\max}(A^*A) > N^2 + 1.$$

Итак, при решении этой системы (всего-то два уравнения) относительная погрешность задания свободного члена может трансформироваться в относительную погрешность результата, усилившись более, чем в N^2 раз!

Анализ трансформированной погрешности усложняется, если ошибки имеются и в матрице коэффициентов. В предположении, что относительные погрешности исходных данных *малы*, можно показать, что

$$\delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\delta A + \delta b}{1 - \text{cond}(A) \cdot \delta(A)}$$

(здесь δA – относительная погрешность задания матрицы A).

Рассмотрим некоторые свойства числа обусловленности:

1. $\text{cond}(A^{-1}) = \text{cond}(A)$.
2. $\text{cond}(A^*) = \text{cond}(A)$.
3. $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ при $\alpha \neq 0$.
4. $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(B)$.
5. $\text{cond}(A) \geq 1$.
6. Если U – унитарная матрица, то

$$\text{cond}(U) = 1; \quad \text{cond}(AU) = \text{cond}(UA) = \text{cond}(A).$$

Доказательство. 1. Следует из определения.

2. Следует из $\|A^*\| = \|A\|$ (свойство **5** матричной нормы).

3. $\text{cond}(\alpha A) = \|\alpha A\| \cdot \|(\alpha A)^{-1}\| = |\alpha| \cdot \|A\| \cdot |\alpha^{-1}| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$.

4. По свойству **4** матричной нормы

$$\begin{aligned} \text{cond}(AB) &= \|AB\| \cdot \|(AB)^{-1}\| \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\| = \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(B). \end{aligned}$$

$$5. 1 = \text{cond}(I) = \text{cond}(A \cdot A^{-1}) \leq \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(A^{-1}) = (\text{cond}(A))^2.$$

$$6. \text{cond}(U) = \|U\| \cdot \|U^{-1}\| = 1 \cdot 1 = 1. \text{ Далее, по свойству 4}$$

$$\text{cond}(AU) \leq \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(U) = \text{cond}(A).$$

Но $A = (AU)U^*$, поэтому

$$\text{cond}(A) \leq \text{cond}(AU) \cdot \text{cond}(U^*) = \text{cond}(AU).$$

Отсюда $\text{cond}(AU) = \text{cond}(A)$, и точно так же $\text{cond}(UA) = \text{cond}(A)$. ■

Замечание. Бытует суеверие (нелепое, как все суеверия), связывающее погрешности решения системы линейных алгебраических уравнений с величиной определителя ее матрицы коэффициентов. Из свойства **3** видно, что произвольно меняя величину этого определителя (умножая матрицу коэффициентов на различные числа), мы не меняем число обусловленности. Приведенный же выше пример показывает, что не меняя величину определителя ($\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{bmatrix} = 1$ при любом N), мы можем получить сколь угодно большое число обусловленности. Этот пример также показывает, что большое число обусловленности можно получить и у матрицы малого размера.

Серьезное предупреждение. Подчеркнем, что погрешности исходных данных не могут быть известны по определению. Обычно удается получить лишь некоторую их оценку (например, оценку сверху относительной погрешности $\delta b = \|\Delta b\|/\|b\| \leq \varepsilon$). Соответственно, и для погрешности решения можно получить лишь оценку сверху (например, $\delta x = \|\Delta x\|/\|x\| \leq \text{cond}(A) \cdot \varepsilon$). Получение точного результата при "зашумленных" исходных данных невозможно. Поэтому трансформированную погрешность часто называют "неустранимой".

13.4. Факторизация матриц и число обусловленности

Как уже упоминалось, при решении задач линейной алгебры используются разложения матриц на множители специального вида. В связи с этим рассмотрим вопрос о влиянии такого разложения на трансформированные погрешности.

Итак, пусть система (13.3.1) решается с помощью факторизации матрицы A :

$$A = A_1 \cdot A_2,$$

т.е. вместо системы (13.3.1) решаются последовательно две системы:

$$A_1 y = b, \quad A_2 x = y.$$

Если вектор b имеет погрешность Δb , то вектор y будет получен с погрешностью $\Delta y = A_1^{-1} \cdot \Delta b$, а вектор x – с погрешностью

$$\Delta x = A_2^{-1} \cdot \Delta y = A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \cdot \Delta b = (A_1 A_2)^{-1} \cdot \Delta b = A^{-1} \Delta b.$$

Казалось бы, погрешность результата не зависит от способа факторизации. Однако в наших выкладках мы упустили из виду, что при решении первой системы к трансформированной погрешности прибавится погрешность метода $\widetilde{\Delta y}$, вызванная неточностью машинной арифметики. При решении второй системы эта погрешность играет роль погрешности в исходных данных и порождает дополнительную трансформированную погрешность $A_2^{-1} \cdot \widetilde{\Delta y}$. Поэтому большое значение имеют числа обусловленности матриц-сомножителей, и их произведение естественно считать критерием качества факторизации.

По свойству **4** числа обусловленности

$$\text{cond}(A_1) \cdot \text{cond}(A_2) \geq \text{cond}(A_1 A_2) = \text{cond}(A),$$

т.е. никакая факторизация не может улучшить "плохую" матрицу. Однако неудачная факторизация может "испортить" даже хорошо обусловленную матрицу.

Пример. Произведем LU -разложение унитарной матрицы (ее число обусловленности равно единице)

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \text{tg}(\varphi) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1/\cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

При $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ положим в примере из п.13.3 $N = \text{tg}(\varphi)$. Тогда $\text{cond}(L) > 1 + \text{tg}^2(\varphi) = 1/\cos^2(\varphi)$. Аналогичные вычисления дают $\text{cond}(U) > 1/\cos^2(\varphi)$. При значениях φ , близких к $\frac{\pi}{2}$, получаются очень плохо обусловленные матрицы. Этот пример показывает, в частности, что за исключением специальных случаев не следует строить LU -разложение без выбора ведущего элемента.

Хорошими свойствами обладает QR -разложение. Из свойства **6** числа обусловленности имеем

$$\text{cond}(Q) = 1; \quad \text{cond}(R) = \text{cond}(Q^* A) = \text{cond}(A).$$

Итак, $\text{cond}(Q) \cdot \text{cond}(R) = \text{cond}(A)$.

Так же доказывается, что в сингулярном разложении $A = U\Sigma V^*$ имеет место равенство

$$\text{cond}(U) \cdot \text{cond}(\Sigma) \cdot \text{cond}(V^*) = \text{cond}(A).$$

Приведем еще пример, когда "хорошей" оказывается модификация LU -разложения. Пусть A – самосопряженная положительно определенная матрица. Тогда *можно показать, что* процесс LDU -разложения можно вести без перестановок строк и столбцов, причем это разложение имеет вид $A = U^*DU$. Если $x \neq \theta$, то

$$\langle Dx, x \rangle = \langle (U^*)^{-1}AU^{-1}x, x \rangle = \langle A \cdot (U^{-1}x), U^{-1}x \rangle > 0,$$

и, в частности, $d_{jj} = \langle De^{(j)}, e^{(j)} \rangle > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Обозначив $D^{1/2} = \text{diag} [\sqrt{d_{11}}, \dots, \sqrt{d_{nn}}]$, получим

$$A = U^*D^{1/2}D^{1/2}U = H^*H, \quad (13.4.1)$$

где $H = D^{1/2}U$ – верхняя треугольная матрица.

Имеем

$$\text{cond}(H) = \frac{\sigma_{\max}(H)}{\sigma_{\min}(H)} = \left(\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \right)^{1/2} = (\text{cond}(A))^{1/2}.$$

Формула (13.4.1) называется *разложением Холецкого*⁶⁸ *положительно определенной матрицы*, а основанный на ней метод решения линейных систем – *методом Холецкого* или *методом квадратного корня*.

⁶⁸ Андре-Луи ХОЛЕЦКИЙ (A.-L. Cholesky, 1875-1918) – французский военный геодезист. Изобретенный им алгоритм широко применялся при решении задач геодезии, но опубликован был лишь после смерти автора, в 1924 г.

Глава 14. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

14.1. Метод простой итерации

Все до сих пор рассматривавшиеся нами методы решения систем относились к классу *прямых* методов: они приводили к решению за конечное число шагов. Здесь мы рассмотрим один из *итерационных* методов⁶⁹ – метод *простой итерации*.

Пусть система n линейных уравнений с n переменными записана в виде

$$x = Ax + b. \quad (14.1.1)$$

Начиная с произвольного вектора $x^{(0)}$, построим последовательность

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} + b, \quad \dots, \quad x^{(k)} = Ax^{(k-1)} + b, \quad \dots \quad (14.1.2)$$

Теорема. Если $\|A\| = q < 1$, то система (14.1.1) имеет единственное решение, причем для любого $x^{(0)}$ последовательность (14.1.2) сходится к этому решению.

Доказательство. Рассмотрим однородную систему $(I - A)x = \theta$. Если x – ее решение, то

$$x = Ax \implies \|x\| = \|Ax\| \leq q\|x\| \implies x = \theta.$$

Поэтому $\det(I - A) \neq 0$, и система (14.1.1) имеет единственное решение. Обозначим его \tilde{x} и вычтем из (14.1.2) равенство $\tilde{x} = A\tilde{x} + b$. Получим

$$x^{(k)} - \tilde{x} = Ax^{(k-1)} - A\tilde{x},$$

откуда

$$\|x^{(k)} - \tilde{x}\| = \|A(x^{(k-1)} - \tilde{x})\| \leq q \cdot \|x^{(k-1)} - \tilde{x}\|, \quad (14.1.3)$$

т.е.

$$\|x^{(k)} - \tilde{x}\| \leq q^k \cdot \|x^{(0)} - \tilde{x}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow +\infty. \quad \blacksquare$$

Теорема доказана и, кроме того, установлено, что последовательность (14.1.2) сходится к решению не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем q .

⁶⁹Ранее мы уже рассмотрели один итерационный метод – метод Якоби решения полной проблемы собственных значений (см. п.8.2).

Из (14.1.3) и неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned}\|x^{(k-1)} - \tilde{x}\| &\leq \|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - \tilde{x}\| \leq \\ &\leq \|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| + q \cdot \|x^{(k-1)} - \tilde{x}\|,\end{aligned}$$

откуда

$$\|x^{(k-1)} - \tilde{x}\| \leq \frac{\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\|}{1 - q}.$$

Таким образом, прекратив итерации, когда норма разности двух соседних приближений станет меньше, чем $\varepsilon(1 - q)$, мы получим решение с погрешностью не большей, чем ε (по норме!).

Замечание. Можно показать, что однозначная разрешимость системы (14.1.1) и сходимость процесса простых итераций к решению обеспечивается, если модули всех собственных чисел матрицы A меньше единицы. При этом, правда, не работает оценка (14.1.3).

Существуют различные методы сведения общей системы линейных уравнений с квадратной матрицей к виду (14.1.1).

Пример. Пусть $B = B^*$ – положительно определенная матрица. Систему $Bx = b$ преобразуем так:

$$Bx = b \iff x = (I - \alpha B)x + \alpha b.$$

Здесь $\alpha > 0$ – пока что произвольное число. Обозначим $A = I - \alpha B$. Тогда $\lambda(A) = 1 - \alpha\lambda(B) < 1$ (поскольку B положительно определена).

Видно, что с ростом α собственные числа матрицы A "ползут" по числовой оси влево от единицы. Поскольку A эрмитова,

$$\|A\| = \sigma_{max}(A) = \max(|\lambda_{max}(A)|, |\lambda_{min}(A)|).$$

Наименьшего значения $\|A\|$ достигает, когда $\lambda_{min}(A) = -\lambda_{max}(A)$, т.е. при

$$1 - \alpha\lambda_{max}(B) = -(1 - \alpha\lambda_{min}(B)).$$

Это дает $\alpha = \frac{2}{\lambda_{max}(B) + \lambda_{min}(B)}$, и

$$\|A\| = \lambda_{max}(A) = 1 - \frac{2\lambda_{min}(B)}{\lambda_{max}(B) + \lambda_{min}(B)} = 1 - \frac{2}{1 + cond(B)}. \quad (14.1.4)$$

В последнем равенстве учтено, что для положительно определенной матрицы

$$cond(B) = \frac{\sigma_{max}(B)}{\sigma_{min}(B)} = \frac{\lambda_{max}(B)}{\lambda_{min}(B)}.$$

Анализ (14.1.4) показывает, что при большом числе обусловленности матрицы коэффициентов рассматриваемой системы знаменатель геометрической прогрессии в (14.1.3) близок к единице, т.е. итерации сходятся медленно, а за счет вычислительных погрешностей могут и расходиться.

Никакими методами нельзя хорошо решить плохую систему!

На практике ситуация осложняется незнанием собственных чисел матрицы коэффициентов системы. Вместо них обычно используются некоторые их оценки. Подробное рассмотрение этой проблемы выходит за рамки нашего курса, как и рассмотрение других, более сложных итерационных методов.

14.2. Итерационное уточнение решений системы линейных алгебраических уравнений

В главе 1 был подробно рассмотрен один из прямых методов решения системы $Ax = b$ – метод Гаусса–Йордана. При этом предполагалось, что арифметические операции выполняются точно. В реальном компьютере вследствие конечности разрядной сетки это условие нарушается. Поэтому найденный *любым* прямым методом вектор $x^{(0)}$ не будет, вообще говоря, решением системы ($Ax^{(0)} \neq b$), и невязка окажется отличной от нуля:

$$d^{(0)} = b - Ax^{(0)} \neq \theta.$$

Попробуем подобрать такой вектор Δx ("добавку" к $x^{(0)}$), чтобы выполнялось равенство

$$A(x^{(0)} + \Delta x) = b.$$

Искомый вектор $\Delta x^{(0)}$ найдем, решая систему

$$A\Delta x = b - Ax^{(0)} = d^{(0)}$$

с той же матрицей A , тем же прямым методом.

Понятно, что из-за неточности машинной арифметики полученный вектор $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$ также не будет, вообще говоря, решением системы ($Ax^{(1)} \neq b$). Найдем новую невязку, и т.д.

Мы построили итерационный процесс

$$d^{(k)} = b - Ax^{(k)}, \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}.$$

Здесь $\Delta x^{(k)}$ – полученное прямым методом "решение" системы $A\Delta x^{(k)} = d^{(k)}$.

Замечания. 1. Вычисление невязок должно выполняться в арифметике повышенной точности, иначе итерации не обеспечат уточнения.

2. Если прямой метод основан на какой-нибудь факторизации матрицы коэффициентов системы, то эту факторизацию – самую трудоемкую часть работы – следует выполнить один раз, полученные сомножители хранить и использовать на каждом шаге итерации.

3. Подробное исследование описанного процесса уточнения решения показало, что для не очень плохо обусловленных систем он сходится чрезвычайно быстро: три-четыре итерации обеспечивают получение решения с машинной точностью. Отсутствие же сходимости свидетельствует об очень большом числе обусловленности, что обычно означает, что эту систему решать не следует.

Мы настоятельно рекомендуем использовать для решения систем линейных уравнений только библиотечные программы с итерационным уточнением.