

**РАДИОЭЛЕКТРОНИКА****2009**Региональные секции  
редакционного совета**СОДЕРЖАНИЕ***Восточная***Председатель** – А. Г. Вострецов, д-р техн. наук, профессор, проректор по научной работе Новосибирского государственного технического университета.**Заместитель председателя** – А. А. Спектор, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой теоретических основ радиотехники Новосибирского государственного технического университета.

630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.

Новосибирский государственный

технический университет.

Тел.: (3832)460457, 460633.

E-mail: [vostretsov@adm.nstu.ru](mailto:vostretsov@adm.nstu.ru)*Западная***Председатель** – В. А. Пахотин, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры общей физики Калининградского государственного университета им. И. Канта.

236041, г. Калининград обл., ул. А. Невского, 14.

Калининградский государственный

университет им. И. Канта.

Тел.: (4012)465917. Факс: (4012)465813.

E-mail: [vpakhotin@kantiana.ru](mailto:vpakhotin@kantiana.ru)*Поволжская***Председатель** – А. Д. Плужников, д-р техн. наук, профессор кафедры информационных радиосистем Нижегородского государственного технического университета.**Заместитель председателя** – Е. Н. Приблудова, канд. техн. наук, доцент кафедры информационных радиосистем Нижегородского государственного технического университета.

603950, г. Нижний Новгород,

ул. К. Минина, 24.

Нижегородский государственный

технический университет.

Тел.: (831)4367880. Факс: (831)4367880,

(831)4362311.

E-mail: [pluzhnikov@nntu.nnov.ru](mailto:pluzhnikov@nntu.nnov.ru)*Северокавказская***Председатель** – Т. А. Исмаилов, д-р техн. наук, профессор, ректор Дагестанского государственного технического университета.**Заместитель председателя** – О. В. Евдулов, канд. техн. наук, доцент, проректор по научной работе Дагестанского государственного технического университета.

367015, Республика Дагестан, г. Махачкала,

пр. Имама Шамиля, 70.

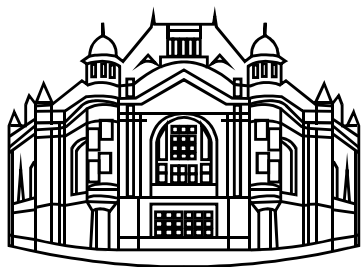
Дагестанский государственный

технический университет.

E-mail: [dstu@dstu.ru](mailto:dstu@dstu.ru)

Тел.: (8722)623761, (8722)623715.

**Электродинамика, микроволновая техника, антенны****Кардо-Сысоев А. Ф., Французов А. Д., Флеров А. Н.** Явление сверхусиления направленного действия антенны при излучении сверхширокополосных короткоимпульсных сигналов ..... 3**Зражевская И. Н.** Принцип Гюйгенса–Френеля в строгой формулировке Фурье ..... 12**Теория сигналов****Бычков Ю. А., Щербаков С. В., Шумаков А. А.** Расчет динамики линейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределенными параметрами на интегрального преобразования Лапласа и функционально-степенных рядов ..... 21**Червинский Е. Н.** Коррекция частотных характеристик при синтезе фильтров нижних частот ..... 35**Богачев М. И.** Сравнительная оценка информативности кратковременной и долговременной зависимостей трафика при прогнозировании его динамики в телекоммуникационных системах ..... 52**Системы телекоммуникации, устройства передачи, приема и обработки сигналов****Садыкова Е. В., Абдува Ахмед М. А.** Система поддержки принятия решений врача-бактериолога микробиологической лаборатории ..... 63**Радиолокация и радионавигация****Калениченко С. П., Сокольников В. А.** Обработка радиолокационных сигналов в цифровых фильтрах с подавлением боковых лепестков функции отклика ..... 69



## Редакционный отдел

Наши авторы .....76

Требования к оформлению статей,  
предлагаемых для публикации в журнале  
"Известия вузов России. Радиоэлектроника" .....79

---

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА

### Председатель совета

*Д. В. Пузанков*

### Заместитель председателя

*В. М. Кутузов*

### Члены совета

*В. М. Балашов, Р. Е. Быков,  
Ю. А. Быстров, Д. И. Воскресенский,  
А. Г. Вострецов, А. Д. Григорьев,  
Ю. В. Гуляев, В. П. Ипатов,  
Т. А. Исмаилов, Ю. М. Казаринов,  
Ю. А. Коломенский, В. Н. Кулешов,  
И. Г. Мироненко, В. А. Обуховец,  
В. А. Пахотин, А. Д. Плужников,  
В. В. Попов, Ю. М. Таиров,  
В. Н. Ушаков, И. Б. Федоров,  
И. А. Цикин, Ю. А. Чаплыгин*

### Секретарь совета

*А. М. Мончак*

ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 45818  
ПО ОБЪЕДИНЕННОМУ КАТАЛОГУ "ПРЕССА РОССИИ".  
ТОМ 1 "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ"

## Региональные секции редакционного совета

### Уральская

**Председатель** – Б. А. Панченко, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой высокочастотных средств радиосвязи и телевидения Уральского государственного технического университета – УПИ.

**Заместитель председателя** – С. Т. Князев, д-р техн. наук, руководитель Радиотехнического института – РТФ Уральского государственного технического университета – УПИ.

620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19.

Уральский государственный  
технический университет – УПИ.

Тел. (343)3754886. E-mail: Shab@rtf.nexcom.ru

### Южная

**Председатель** – В. А. Обуховец, д-р техн. наук, профессор, декан радиотехнического факультета Таганрогского политехнического института Южного федерального университета.

347928, г. Таганрог, ГСП-17А, Некрасовский пр., 44.

Таганрогский политехнический институт  
Южного федерального университета.

Тел. (8634)310599. Факс (8634)310598.

E-mail: rector@tsure.ru

### Свидетельство о регистрации ПИ № ФС2-8341

от 02.11.2006 выдано Управлением Федеральной службы по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия по Северо-Западному федеральному округу.

### Издание входит в перечень изданий ВАК России

**Учредитель:** Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)»

### Редактор

*И. Б. Синишева*

### Компьютерная верстка

*Е. Н. Паздниковой*

Подписано в печать 31.03.09.

Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.

Печать офсетная.

Гарнитура "Times New Roman".

Печ. л. 10,0.

Тираж 350 экз. (1-й завод 1–150 экз.).

Заказ 14.

### Редакционный совет

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5

Издательство СПбГЭТУ "ЛЭТИ"

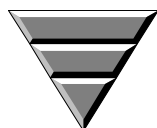
Тел. (812) 346-47-84

Факс (812) 346-28-52

### Издательство СПбГЭТУ "ЛЭТИ"

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5

Факс (812) 346-28-56



**А. Ф. Кардо-Сысоев**

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе (Санкт-Петербург)

**А. Д. Французов**

ОАО «Научно-производственное предприятие «Радар-ММС»  
(Санкт-Петербург)

**А. Н. Флеров**

Балтийский государственный технический университет «Военмех»  
им. Д. Ф. Устинова (Санкт-Петербург)

## Явление сверхусиления направленного действия антенны при излучении сверхширокополосных короткоимпульсных сигналов

*Показано, что для сверхширокополосного короткоимпульсного (СКИ) сигнала средний и импульсный коэффициенты направленного действия (КНД) антенн не равны друг другу. Доказано, что при излучении биполярного СКИ-сигнала наблюдается явление сверхусиления направленного действия, состоящее в значительном увеличении импульсного КНД антенны по сравнению с КНД для монохроматического колебания, имеющего период колебания, равный длительности биполярного СКИ.*

**Сверхширокополосный короткоимпульсный сигнал, импульсный коэффициент направленного действия, биполярный сверхкороткий импульсный сигнал, сверхусиление направленного действия**

Энергетическим характеристикам апертурных антенн, излучающих негармонические волны, посвящено значительное количество работ (см., например, [1]–[3]). В указанных работах показано отличие понятий коэффициента направленного действия (КНД), принятого в антенной технике для монохроматических колебаний [4], и КНД антенны в случае более сложной зависимости излучаемых колебаний от времени. При этом КНД определяется через разложение излучаемого колебания в спектр Фурье.

Определим КНД антенны, как это принято в технике антенн [4], не прибегая к разложению сигнала в спектр Фурье. КНД антенны называют отношение мощности, излучаемой ненаправленной антенной, к мощности, излучаемой направленной антенной, если плотность потока мощности в заданном направлении на одном и том же расстоянии от антенн будет одинакова. В случае сверхширокополосного короткоимпульсного (СКИ) сигнала это определение следует откорректировать с учетом особенностей излучения СКИ-сигналов апертурными антеннами, которые заключаются в том, что формы импульсов поля в раскры-

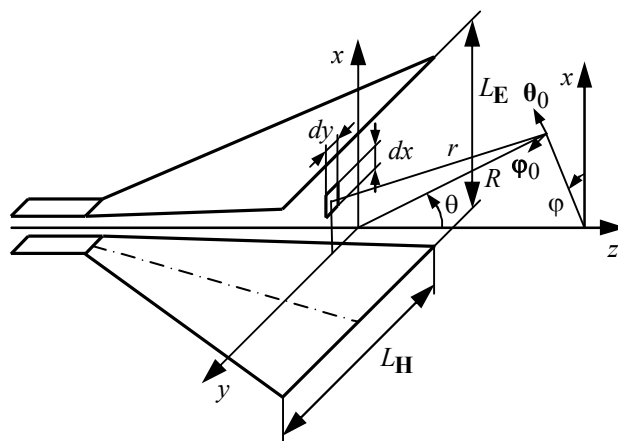


Рис. 1

ве антенны  $f(t)$  и в дальней зоне (ДЗ)  $f'(t)$  (представляющей собой производную от формы импульса в раскрыве антенны) существенно отличаются друг от друга [5]. Для СКИ-сигнала можно рассматривать как среднее значение КНД, так и его импульсное значение.

В дальней зоне антенны (рис. 1)  $R \geq R_{a \text{ ДЗ}} \geq \left[ 2(L_E^2 + L_H^2) / \tau_0 v_0 \right]$  и импульса [5]  $R \geq R_{и \text{ ДЗ}} \gg \tau_0 v_0$  ( $L_E, L_H$  – размеры раскрыва антенны в Е- и Н-плоскостях соответственно;  $\tau_0$  – длительность импульса генератора по нулевому уровню;  $v_0$  – скорость света в среде распространения) уравнения векторов напряженностей поля имеют вид

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_a (1 + \cos \theta)}{4\pi R} (\boldsymbol{\theta}_0 \cos \varphi - \boldsymbol{\varphi}_0 \sin \varphi) \int_S H_y(x, y) f'(t - r/v_0) dx dy; \quad (1)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} (1 + \cos \theta)}{4\pi R} (\boldsymbol{\theta}_0 \sin \varphi + \boldsymbol{\varphi}_0 \cos \varphi) \int_S H_y(x, y) f'(t - r/v_0) dx dy, \quad (2)$$

где  $\mu_a, \varepsilon_a$  – абсолютные магнитная и диэлектрическая проницаемости среды соответственно;  $\theta, \varphi, R$  – координаты точки наблюдения (см. рис. 1);  $\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\varphi}_0$  – единичные угловые орты сферической системы координат (см. рис. 1);  $S$  – поверхность апертуры антенны;  $H_y(x, y)$  – амплитудное распределение поля в раскрыве антенны ( $x, y$  – координаты точки в раскрыве антенны);  $f'(t - r/v_0)$  – первая производная функции, описывающей зависимость сигнала от времени  $t$  в точке наблюдения на расстоянии  $r$  от точки в раскрыве;  $r = R - x \sin \theta \cos \varphi - y \sin \theta \sin \varphi$ .

Плотность потока мощности излучения ненаправленной антенны в дальней зоне

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (3)$$

где "×" – знак векторного произведения векторов.

Средняя мощность, излучаемая направленной антенной, определенная через поле в раскрыве, определится как

$$P_{ср \text{ п}} = (Z_{в} / \tau_0) \int_S |H_y(x, y)|^2 ds \int_0^{\tau_0} f^2(t) dt, \quad (4)$$

где  $Z_{в} = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$  – волновое сопротивление среды;  $\tau_0$  – длительность импульса генератора по нулевому уровню.

Импульсная мощность, излучаемая направленной антенной:

$$P_{и \text{ а}} = Z_{в} f_{\text{max}}^2(t) \int_S |H_y(x, y)|^2 ds, \quad (5)$$

где  $f_{\text{max}}(t)$  – максимальное значение амплитуды поля в раскрыве антенны.

Средняя мощность, излучаемая ненаправленной антенной в ДЗ, определится из уравнения

$$P_{\text{ср } 0} = (4\pi R^2 / \tau) \int_0^{\tau} \Pi dt, \quad (6)$$

где  $\tau$  – длительность импульса излучения в дальней зоне;  $\Pi = |\mathbf{\Pi}|$ .

Импульсная мощность, излучаемая при этом ненаправленной антенной в ДЗ, определяется как

$$P_{\text{и } 0} = 4\pi R^2 \Pi_{\text{max}}, \quad (7)$$

где  $\Pi_{\text{max}}$  – максимальное значение плотности потока мощности.

После подстановки уравнений (1) и (2) в уравнения (3)–(7) получим средний и импульсный КНД апертурной антенны:

$$D_{\text{ср}} = P_{\text{ср } 0} / P_{\text{ср } a} = (\varepsilon_a \mu_a / \pi) A_0 (\tau_0 / \tau) \left\{ \int_0^{\tau} [f'(t)] dt / \int_0^{\tau_0} f^2(t) dt \right\}; \quad (8)$$

$$D_{\text{и}} = P_{\text{и } 0} / P_{\text{и } a} = (\varepsilon_a \mu_a / \pi) A_0 \left[ (f'_{\text{max}})^2 / f_{\text{max}}^2 \right], \quad (9)$$

где:  $A_0 = \left[ \int_S H_y(x, y) ds \right]^2 / \int_S H_y^2(x, y) ds$  – эффективная площадь раскрыва;  $f'_{\text{max}} = \max_t f'(t)$ ;  $f_{\text{max}} = \max_t f(t)$ .

В случае равенства длительностей импульсов в раскрыве антенны и в ДЗ ( $\tau_0 = \tau$ ) выражение (8) для среднего КНД антенны приобретет вид

$$D_{\text{ср}} = (\varepsilon_a \mu_a / \pi) A_0 \left\{ \int_0^{\tau} [f'(t)]^2 dt / \int_0^{\tau_0} f^2(t) dt \right\}. \quad (10)$$

Уравнение (10) полностью соответствует выражению, полученному в [1], а уравнение (9) получено впервые.

Если воспользоваться теоремой о среднем значении интеграла, то уравнение для среднего значения КНД будет иметь тот же вид, что и для импульсного КНД, а именно:

$$D_{\text{ср}} = (\varepsilon_a \mu_a / \pi) A_0 \left[ (f'_{\text{ср}})^2 / f_{\text{ср}}^2 \right],$$

где  $(f'_{\text{ср}})^2$  и  $f_{\text{ср}}^2$  – средние значения интегралов в формуле (10).

Если ввести коэффициенты формы импульсов генератора  $K_{\text{ф } \Gamma}$  и излученного импульса в ДЗ  $K_{\text{ф } \text{ДЗ}}$  в виде  $K_{\text{ф } \Gamma} = f_{\text{max}}^2 / f_{\text{ср}}^2$  и  $K_{\text{ф } \text{ДЗ}} = (f'_{\text{max}})^2 / (f'_{\text{ср}})^2$ , то импульсный КНД можно выразить через средний КНД и коэффициенты формы:

$$D_{\text{и}} = D_{\text{ср}} (K_{\text{ф } \text{ДЗ}} / K_{\text{ф } \Gamma}).$$

Для монохроматического сигнала, когда коэффициенты формы излученного сигнала и сигнала генератора одинаковы, импульсный и средний КНД совпадают. Для СКИ-сигнала импульсный и средний КНД не равны друг другу.

Энергетическую эффективность антенны, излучающей СКИ-сигнал, принято характеризовать эффективным потенциалом [6]:  $U_E = E_{\max} R$ , где  $E_{\max}$  – амплитуда напряженности электрического поля в дальней зоне излучения антенны в максимуме излучения на расстоянии  $R$  от раскрыва.

Максимум излучения рупорной антенны направлен по нормали к поверхности раскрыва. Плотность потока мощности в максимуме излучения антенны

$$\Pi_{\max} = E_{\max}^2 / Z_B. \quad (11)$$

Определим по формуле (7) импульсную мощность излучения ненаправленной антенны, создающей ту же самую импульсную мощность, что и направленная антенна, подставив в (7) выражение (11):

$$P_{и0} = 4\pi R^2 E_{\max}^2 / Z_B. \quad (12)$$

Если сигнал генератора передается к антенне через согласованную линию передачи, имеющую коэффициент полезного действия  $\eta$ , импульсная мощность излучения генератора определится через напряжение генератора в импульсе  $U_{иГ}$  и волновое сопротивление линии передачи  $Z_0$  следующим образом:

$$P_{иГ} = U_{иГ}^2 / Z_0. \quad (13)$$

С учетом (9), а также учитывая, что  $D_{и\eta} = G_{и}$  является импульсным коэффициентом усиления антенны, из уравнений (12) и (13) получим максимальную напряженность электрического поля антенны в ДЗ:  $E_{\max} = (U_{иГ} / R) \sqrt{Z_B G_{и} / 4\pi Z_0}$ .

Для свободного пространства  $Z_B = 120\pi$  и эффективный потенциал антенны

$$U_{э} = U_{иГ} (30 D_{и\eta} / Z_0)^{1/2}.$$

Таким образом, эффективный потенциал пропорционален корню квадратному из импульсного КНД антенны, излучающей СКИ-сигнал.

Рассмотрим преобразование СКИ-сигнала и его спектра при излучении в дальней зоне для импульсов разной формы. Рассмотрим импульс  $f_1(t)$ , среднее значение которого отлично от нуля, и импульс  $f_2(t)$ , среднее значение которого равно нулю:

$$f_1(t) = \cos(\omega_0 t) \exp[-\beta(t/\tau_{0.5})^2]; \quad f_2(t) = \sin(\omega_0 t) \exp[-\beta(t/\tau_{0.5})^2],$$

где  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  – круговая частота заполнения;  $\beta = -\ln 0.5$ ;  $\tau_{0.5}$  – полуширина гауссоиды по уровню, равному половине от ее максимального значения. При  $\chi_0 = f_0 2\tau_{0.5} \ll 1$  сигнал  $f_1(t)$  имеет униполярную форму (рис. 2, а, кривая 1), а сигнал  $f_2(t)$  – биполярную (рис. 2, б, кривая 1). При  $\chi_0 \gg 1$   $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  представляют собой узкополосные короткоимпульсные сигналы. На рис. 2 эти сигналы представлены для значений  $\chi_0 = 1$  (кривые 2) и  $\chi_0 = 4$  (кривые 3)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> На рис. 2 и в дальнейшем  $t_H = t/\tau_{0.5}$ .

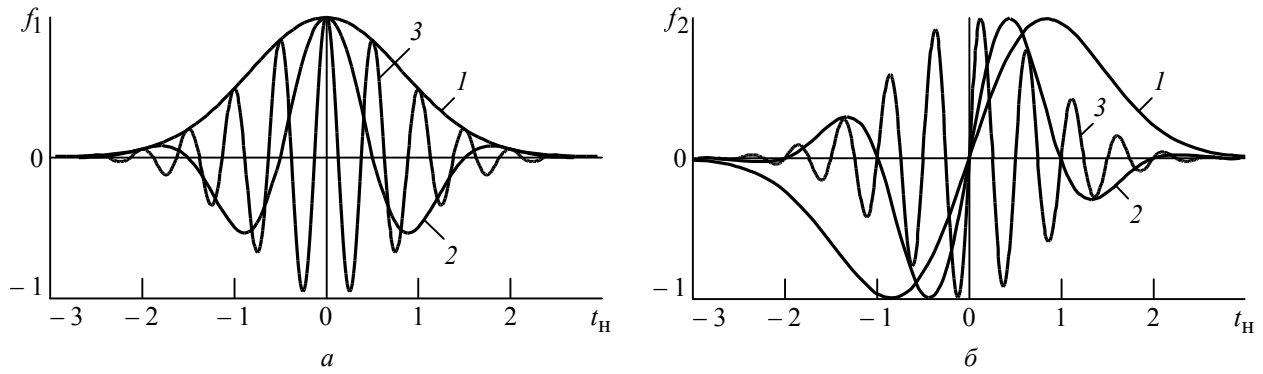


Рис. 2

Рассмотрим зависимость спектров сигналов от параметра  $\chi_0$ . Анализируемые сигналы  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  представляют собой произведение двух функций: гауссоиды и монохроматического колебания, четного (косинус) или нечетного (синус) относительно нулевого значения оси времени. Спектр произведения является сверткой спектров перемножаемых сигналов [7]. Для сигнала  $f_1(t)$  спектр представляет собой свертку спектров низкочастотной гауссоиды  $S_{\Gamma}$  и косинусоиды  $S_{\kappa}$ :

$$S_1(\omega) = (1/2\pi) S_{\kappa}(\omega) * S_{\Gamma}(\omega) = 0.5 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] * S_{\Gamma}(\omega),$$

где  $S_{\kappa}(\omega) = 0.5 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$  – спектр монохроматического колебания  $\cos(\omega_0 t)$ ;

$S_{\Gamma}(\omega) = \sqrt{\pi\tau_{0.5}^2/\beta} \exp[-\omega^2\tau_{0.5}^2/4\beta]$  – спектр гауссоиды [8].

Проведя необходимые преобразования, получим спектр импульса  $f_1(t)$  в виде

$$S_1(\nu_H) = \sqrt{\pi\tau_{0.5}^2/4\beta} \left\{ \exp[-\pi\chi_0^2(\nu_H + 1)^2/\beta] + \exp[-\pi\chi_0^2(\nu_H - 1)^2/\beta] \right\},$$

где  $\nu_H = \nu/\nu_0$ ;  $\nu$  – частота.

Аналогично можно получить спектр импульса  $f_2(t)$ , если воспользоваться формулой для спектра синусоидального колебания  $\sin(\omega_0 t)$ :  $S_c(\omega) = j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$ . После преобразований получим:

$$S_2(\nu_H) = j\sqrt{\pi\tau_{0.5}^2/4\beta} \left\{ \exp[-\pi\chi_0^2(\nu_H + 1)^2/\beta] - \exp[-\pi\chi_0^2(\nu_H - 1)^2/\beta] \right\}.$$

Спектр  $S_1(\nu_H)$  представлен на рис. 3, а, а спектр  $S_2(\nu_H)$  – на рис. 3, б (кривые 1:  $\chi_0 = 0.05$ , кривые 2:  $\chi_0 = 1$ , кривые 3:  $\chi_0 = 4$ ). Из кривых видно, что при  $\chi_0 \geq 1$  спектры сигналов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  практически не отличаются и приближаются к спектру монохроматического колебания в виде  $\delta$ -функции. По мере уменьшения параметра  $\chi_0$  спектры импульсов расширяются, причем для униполярного импульса спектр расширяется в основном в сторону низких частот, а для биполярного импульса – в область высоких частот.

Импульсы в ДЗ описываются производными от импульсов в раскрыве антенны:

$$f_1'(t_H) = (-1/\tau_{0.5}) [\pi\chi_0 \sin(\pi\chi_0 t_H) + 2\beta t_H \cos(\pi\chi_0 t_H)] \exp(-\beta t_H^2);$$

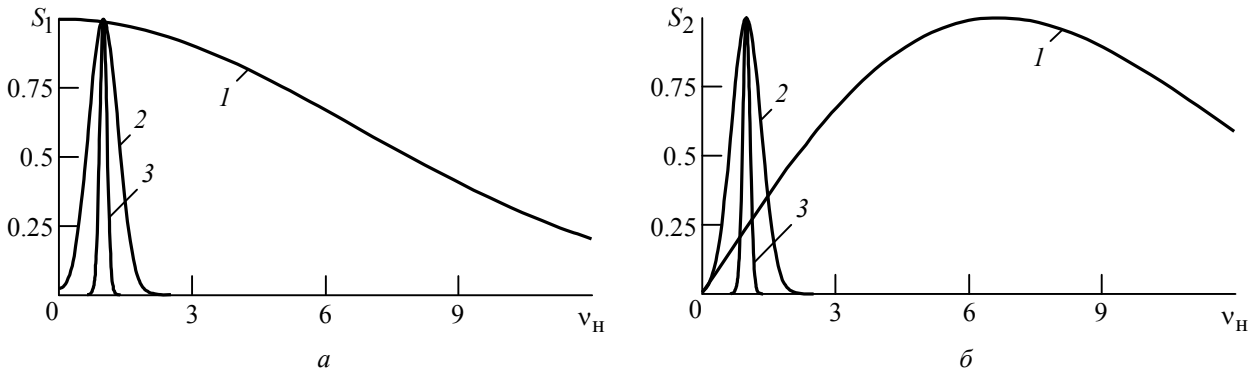


Рис. 3

$$f'_2(t_H) = (1/\tau_{0.5}) [\pi\chi_0 \cos(\pi\chi_0 t_H) - 2\beta t_H \sin(\pi\chi_0 t_H)] \exp(-\beta t_H^2).$$

Они представлены рис. 4 для тех же значений параметра  $\chi_0$ , что и импульсы на рис. 2.

Из рис. 4 следует, что возбуждающий раскрыв униполярный СКИ трансформируется в ДЗ в биполярный сигнал, а биполярный СКИ трансформируется в характерный сигнал, называемый "сомbrero", или "мексиканская шляпа". Узкополосный короткоимпульсный сигнал с косинусоидальным заполнением трансформируется в короткоимпульсный сигнал с синусоидальным заполнением, и наоборот. Другими словами, в узкополосном короткоимпульсном сигнале, так же, как и в монохроматическом колебании, при распространении в дальнюю зону происходит сдвиг фазы колебания на  $90^\circ$ .

Спектр излученного импульса в дальней зоне определим как спектр производной сигнала [9]  $F(\omega) = j\omega S(\omega)$ . После преобразований для спектра производной  $f'_1(t)$  имеем

$$F_1(\nu_H) = j\pi\sqrt{\pi/4\beta}\chi_0\nu_H \left\{ \exp\left[-\pi\chi_0^2(\nu_H+1)^2/\beta\right] + \exp\left[-\pi\chi_0^2(\nu_H-1)^2/\beta\right] \right\},$$

а для спектра производной  $f'_2(t)$

$$F_2(\nu_H) = \pi\sqrt{\pi/4\beta}\chi_0\nu_H \left\{ \exp\left[-\pi\chi_0^2(\nu_H+1)^2/\beta\right] - \exp\left[-\pi\chi_0^2(\nu_H-1)^2/\beta\right] \right\}.$$

Спектры излученных сигналов  $F_1(\nu_H)$  и  $F_2(\nu_H)$  представлены на рис. 5 для тех же значений  $\chi_0$ . При  $\chi_0 \geq 1$  спектры сигналов в дальней зоне практически не отличаются от спектров, возбуждаемых в раскрыве антенны. С ростом значения  $\chi_0$  спектры приближаются по форме к  $\delta$ -функции.

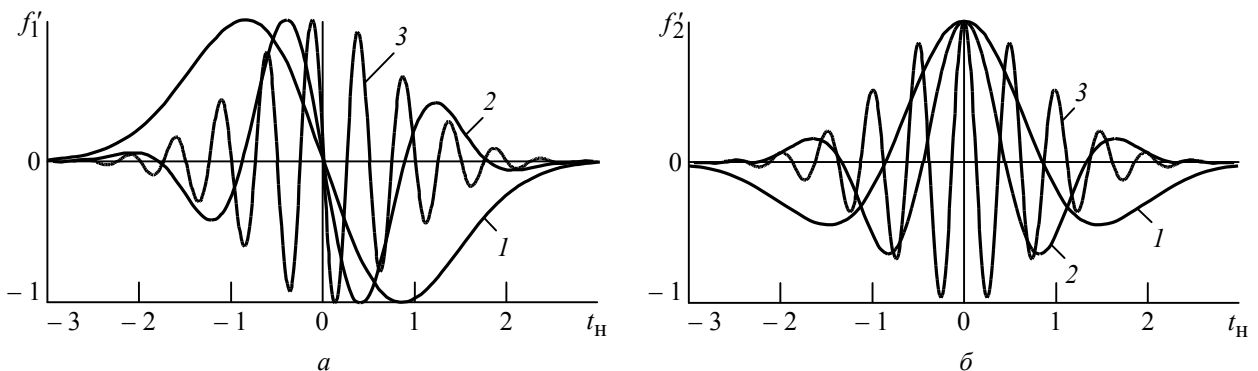


Рис. 4



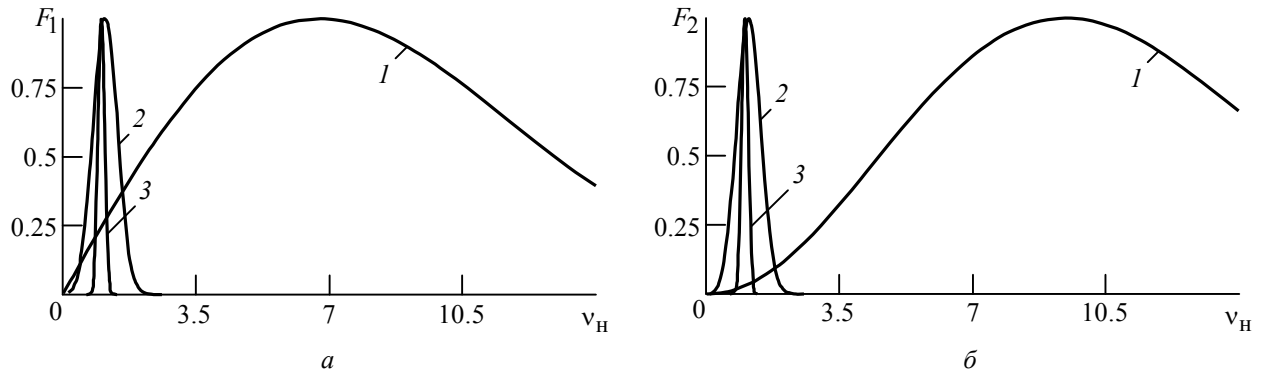


Рис. 5

Совершенно иначе изменяются в дальней зоне спектры СКИ-сигналов (при  $\chi_0 \ll 1$ ) (см. рис. 4, *а* и *б*, кривые *1*). Спектр униполярного СКИ (рис. 4, *а*, кривая *1*) смещается в область верхних частот с одновременным расширением. Средняя частота, определяемая по ширине спектра на уровне 0.707, смещается приблизительно на 38%, а расширение спектра происходит почти в два раза. При этом относительная ширина спектра [10]  $W = (v_{\max} - v_{\min}) / (v_{\max} + v_{\min})$  уменьшается с 1 до 0.55 ( $v_{\max}$  и  $v_{\min}$  – максимальная и минимальная частоты спектра на уровне 0.707 соответственно). Спектр биполярного СКИ, не расширяясь в абсолютных значениях, смещается в область высоких частот. При этом смещение спектра достигает приблизительно 36% от его средней частоты. Относительная ширина спектра в данном случае уменьшается с 0.55 до 0.4.

Для определения энергетических характеристик анализируемых сигналов необходимо определить максимальные значения сигналов в раскрыве антенны, а также максимальные значения их производных в дальней зоне излучения.

Максимальное значение сигнала  $f_{1\max} = 1$  возникает при  $t_H = 0$ . Чтобы определить максимум сигнала  $f_2(t)$ , необходимо найти значение  $t_{2\max}$  как решение трансцендентного уравнения  $\text{tg}(\pi\chi_0 t_{2\max}) = (\pi\chi_0 / 2\beta t_{2\max})$ . Тогда максимум  $f_2(t)$  составит

$$f_{2\max} = \sin(\pi\chi_0 t_{2\max}) \exp(-\beta t_{2\max}^2).$$

Максимальное значение  $f'_{1\max}$  определится при подстановке  $t_H = t_{1\max}$ , найденного из решения уравнения  $\text{tg}(\pi\chi_0 t_{1\max}) = [(\pi^2\chi_0^2 + 2\beta) / 4\pi\beta\chi_0 t_{1\max}] - (\beta t_{1\max} / \pi\chi_0)$ , и составит

$$f'_{1\max} = (-\pi\chi_0 / \tau_{0.5}) [\sin(\pi\chi_0 t_{1\max}) + (2\beta t_{1\max} / \pi\chi_0) \cos(\pi\chi_0 t_{1\max})] \exp(-\beta t_{1\max}^2).$$

Максимальное значение  $f'_{2\max}$  имеет место при  $t_H = 0$  и равно  $f'_{2\max} = \pi\chi_0 / \tau_{0.5}$ .

Импульсные КНД антенны для импульсов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  равны, соответственно,

$$\begin{aligned} D_{1и} &= (\pi\epsilon_a \mu_a / \tau_{0.5}^2) A_0 K_1; \\ D_{2и} &= (\pi\epsilon_a \mu_a / \tau_{0.5}^2) A_0 K_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$K_1 = [\chi_0 \sin(\pi\chi_0 t_{1\max}) + (2\beta t_{1\max}/\pi) \cos(\pi\chi_0 t_{1\max})]^2 \exp(-2\beta t_{1\max}^2);$$

$$K_2 = \chi_0^2 / [\sin^2(\pi\chi_0 t_{2\max}) \exp(-2\beta t_{2\max}^2)].$$

Отношение КНД для импульсов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  составит  $D_{2и}/D_{1и} = K_2/K_1$ . Зависимость этого отношения от параметра  $\chi_0$  представлена на рис. 6. Из рисунка следует, что КНД антенн для импульса  $f_2(t)$  всегда превышает КНД для импульса  $f_1(t)$ . Такой эффект можно объяснить, если сравнить спектры СКИ-сигналов в дальней зоне с их спектрами в раскрыве антенны при одном и том же значении параметра  $\chi_0$ . Для  $\chi_0 = 0.05$ , когда сигнал  $f_1(t)$  является униполярной гауссоидой, а сигнал  $f_2(t)$  состоит всего из одного колебания, импульсный КНД антенны для биполярного импульса  $f_2(t)$  в раскрыве превосходит импульсный КНД этой же антенны, но при униполярном импульсе  $f_1(t)$  в раскрыве, в 7.32 раза (8.6 дБ).

Выразив импульсный КНД антенны для биполярного импульса из формулы (14) через длительность импульса по уровню 0.1 от его амплитуды  $\tau_{0.1}$ , получим

$D_{2и} = 2.1 [4\pi / (2\tau_{0.1}v_0)^2] A_0$ . Из этого выражения видно, что если антенна излучает монохроматическое колебание с длиной волны, равной  $\tau_{0.1}$  ( $\lambda_0 = 2\tau_{0.1}v_0$ ), то КНД такой антенны, возбужденной монохроматическим колебанием, будет в 2.1 раза (на 3.2 дБ) меньше, чем в случае возбуждения этой же антенны биполярным импульсом в виде производной гауссоиды. Естественно, что количественный выигрыш зависит от конкретной формы сигнала, но сам факт энергетического выигрыша позволяет говорить о явлении сверхусиления направленного действия антенны при использовании биполярного СКИ.

Явление сверхусиления направленного действия антенны объясняется тем, что при распространении СКИ-сигнал в дальней зоне становится пропорциональным первой производной сигнала в раскрыве антенны по времени. Для излученного импульса типа "мексиканская шляпа" (возбуждающий импульс биполярный) высокочастотные составляющие спектра всегда больше по амплитуде, чем у импульса, формируемого униполярным возбуждающим сигналом (см. рис. 5, кривые 1).

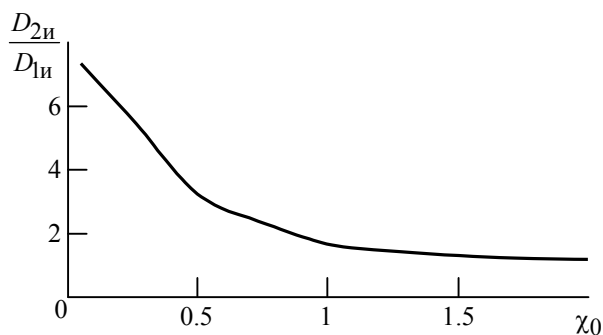


Рис. 6

Таким образом, в радиосистемах для эффективного использования спектра частот необходимо применять биполярный возбуждающих импульс, у которого значения изменяются с наибольшей скоростью в его середине при переходе от отрицательных значений к положительным. Критерием оптимальности при выборе формы импульса может быть заданная ширина спектра частот при максимуме КНД.

В результате исследования явления сверхусиления направленного действия антенны разработан способ формирования биполярного СКИ из униполярного импульса генератора непосредственно в раскрыве антенны [11], заключающийся в том, что импульс генератора задерживается приблизительно на половину длительности СКИ, инвертируется и суммируется с исходным импульсом. Этот способ позволил разработать ряд сверхширокополосных антенн, возбуждающих в раскрыве биполярный импульс, полученный из униполярного импульса генератора, подводимого к входу антенны. Рассмотренный способ использовался при экспериментальном измерении коэффициента сверхусиления направленного действия антенны при излучении биполярного СКИ-сигнала [12]. Результаты измерения полностью подтвердили теоретический вывод о возникновении явления сверхусиления направленного действия антенны при излучении биполярного СКИ-сигнала.

Явление сверхусиления направленного действия антенны, возникающее при излучении биполярного СКИ, а также явление сверхнаправленности, возникающее при создании специального распределения поля в антенне [13], возбуждаемой монохроматическим колебанием, совершенно не связаны друг с другом. Сверхусиление направленного действия антенны при излучении биполярного СКИ-сигнала связано с преобразованием сигнала в процессе распространения его в пространстве и определяется исключительно свойствами пространства и формой возбуждающего импульса.

### Список литературы

1. Зернов Н. В., Меркулов Г. В. Энергетические характеристики антенн, излучающих негармонические волны // Радиотехника. 1991. № 1. С. 68–71.
2. Энергетические характеристики радиосигналов передачи-приема сверхширокополосных сигналов и сверхкоротких импульсов / под ред В. Б. Авдеева. / Воен. ин-т радиоэлектроники МО РФ. Воронеж, 2004. 104 с.
3. Моделирование малогабаритных сверхширокополосных антенн / под ред. В. Б. Авдеева, А. В. Ашихмина. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. 222 с.
4. Французов А. Д. Основы расчета и конструирования излучающих устройств / Челяб. политехн. ин-т. Челябинск, 1981. 64 с.
5. Французов А. Д. Теория излучения сверхширокополосных сверхкороткоимпульсных (СКИ) сигналов рупорными антеннами // Проблемы интеллектуального и военного транспорта. 2006. № 7. С. 264–267.
6. Кардо-Сысоев А. Ф., Французов А. Д. Энергетика импульсной активной фазированной антенной решетки // Проблемы транспорта. 2001. № 5. С. 125–127.
7. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов по спец. "Радиотехника". 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 2000. 462 с.
8. Schantz H. The art and science of ultra wideband antennas. Boston, London: Artech house, 2005. 331 p.
9. Французов А. Д., Кочетов А. В., Головачев М. В. Оптимизация формы излучаемого сверхкороткоимпульсного (СКИ) сигнала // Сб. докл. второй всерос. науч. конф.–сем., Муром, 4–7 июля 2006 г. / Изд.-полигр. центр МИВлГУ. Владимир, 2006. С. 456–460.
10. Harmuth H. F. Antennas and waveguides for nonsinusoidal waves. Juc., USA: Academic press, 1984. 376 p.
11. Патент РФ 2 295 180. H01Q 21/06 / Способ возбуждения широкополосной антенной решетки и широкополосная антенная решетка (варианты) для его осуществления / А. Д. Французов, А. Ф. Кардо-Сысоев, А. Н. Флеров и др. Оpubл. 10.03.2007. Бюл. № 7.
12. Метод измерения коэффициентов сверхнаправленности при излучении СКИ-сигнала / А. Д. Французов, А. Ф. Кардо-Сысоев, А. Н. Флеров и др. // Сверхширокополосные сигналы и сверхкороткие импульсы в радиолокации, связи и акустике: сб. докл. 1-й междунар. конф., Суздаль, 27–29 сентября 2005 г. М.: РНТОРЭС им. А. С. Попова, ИРЭ РАН, Российская секция IEEE, 2005. С. 116–118.
13. Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны: Учебник для студентов радиотехнических специальностей вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1975. 528 с.

A. F. Kardo-Sysoev

Physical technical institute named A. F. Ioffe (Saint Petersburg)

A. D. Frontsuzov

Compani "Radar-MMS" (Saint Petersburg)

A. N. Flerov

Baltic state technical university "Voenmekh" named D. F. Ustinov (Saint Petersburg)

### Super directive gain in case of radiation of ultra wide band short pulse signals

*It is shown, that in the case of ultra wide band short pulse (UWBSP) signal, the peak directive gain strongly differs from average gain. It is shown that in case of radiation of ultra wide band short pulse signals directive gain is far higher than in harmonic wave having period of the fluctuation to equal duration bipolar UWBSP.*

Ultra wide band short pulse signal, the peak directive gain, bipolar ultra wide band short pulse signal, super directive gain

Статья поступила в редакцию 20 марта 2009 г.

УДК 538.30:516.6

**И. Н. Зражевская**

Центральный научно-исследовательский институт  
им. акад. А. Н. Крылова (Санкт-Петербург)

## Принцип Гюйгенса–Френеля в строгой формулировке Фурье

*Рассмотрено строгое решение задачи о первичном поле нити тока, облучающей удаленный бесконечный цилиндр. Установлено, что решение, выполненное методом Фурье в дуговых координатах, представляет картину поля, в основании которой лежат идеи Гюйгенса о вторичных источниках и идеи Френеля об интерференции излучаемых ими волн. На примере рассматриваемой задачи показано, что вторичные источники первичного поля, возбуждаемые на вспомогательной волновой поверхности, охватывают всю поверхность облучаемого цилиндра. Благодаря этой особенности первичного поля, облучающего выпуклое тело, вторичное поле на всей его поверхности подчинено законам отражения Френеля.*

### Первичное поле, вторичные источники, интерференция волн, законы отражения

Решение граничных задач электродинамики методом Фурье, проведенное в дуговых координатах [1], позволило проанализировать процесс формирования первичного поля, облучающего выпуклое тело. В результате стало очевидным, что метод Фурье дает строгую математическую формулировку свойств этого поля, основанную на идеях Гюйгенса–Френеля. В настоящей статье это показано на частном примере облучения бесконечного цилиндра нитью тока, параллельной его оси. Для иллюстрации общности идей указанных подходов решению Фурье предпосылается краткое изложение построений Гюйгенса, касающихся вторичных источников, и соединенного с ними представления Френеля об интерференции излучаемых волн.

**Принцип Гюйгенса–Френеля.** Согласно принципу, сформулированному Х. Гюйгенсом в 1678 г. [2] и многократно описанному в фундаментальных курсах оптики и электромагнитных волн (см., например, [3]–[5]), каждую точку сферической поверхности, до которой дошло излучение первичного (точечного) источника, можно рассматривать как источник вторичных сферических волн. Огибающая этих вторичных волн определяет волновую

поверхность в любой последующий момент времени. Принцип Гюйгенса основан на чисто геометрическом построении огибающих волновых поверхностей и подразумевает только прямолинейное распространение световых лучей. Однако представление Гюйгенса о том, что каждая точка некоторой (вспомогательной) волновой поверхности служит самостоятельным источником вторичных волн, оказалось исключительно плодотворным.

В 1818 г. А. Френель объединил идею Гюйгенса о возбуждении вторичных источников первичного поля и принцип интерференции когерентных волн, выдвинутый Юнгом. Френель показал, что синтеза этих двух принципов достаточно, чтобы объяснить явление дифракции на краю и на небольших отверстиях в плоском экране. Принцип Гюйгенса–Френеля, предусматривающий суммирование элементарных сферических волн, возбуждаемых вторичными источниками, позволил решить ряд задач с помощью построения "зон Френеля" при условии, что в каждой точке исходной волновой поверхности амплитуда и фаза вторичных источников заданы.

Уточнение принципа Гюйгенса–Френеля принадлежит Кирхгофу (1882 г.), который полагал, что этот принцип можно считать приближенной формой интеграла однородного волнового уравнения, выражаемого формулой, полученной при помощи теорем Грина. Однако формула Кирхгофа дает возможность вычислить дифракционное поле в точке его наблюдения лишь в том случае, если значения амплитуды и фазы вторичных источников интерферирующих сферических волн на произвольно заданной замкнутой поверхности известны. За неимением точных значений этих величин их назначают в значительной мере произвольно исходя из приближенных физических представлений.

**Метод Фурье.** Рассматривая дифракцию на отверстиях в плоском непрозрачном экране, Френель полагал, что падающее на отверстие поле далекого от него источника действует так же, как если бы экран отсутствовал. Формула Кирхгофа, удобная для приближенного решения задач дифракции на плоских поверхностях с резкими краями, основана на том же предположении. Задание падающего поля в виде плоской волны оказалось хотя и небезупречным, но действенным способом приближенного решения большого и важного класса дифракционных задач.

Исследование явления дифракции на выпуклых телах различной формы также проводится при облучении этих тел удаленным источником первичного поля. Поэтому и в данном случае исходят из тех же приближенных соображений, полагая, что на поверхность дифрагирующего тела падает плоская волна [6]. Однако поле, излучаемое первичным источником, может считаться локально плоским на большом расстоянии от него только в случае, если оно распространяется в свободном (безграничном) и однородном пространстве. Утверждение, что оно остается плоским и вблизи выпуклого тела, облучаемого удаленным источником, из полученных решений не следует и является лишь предположением. Поэтому решения граничных задач методом Фурье, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца и граничным условиям, но использующие указанное представление о характере первичного поля [7], [8], также приводят к приближенным результатам. Однако сложность аналитической формы решений, получаемых методом Фурье в ортогональных криволинейных координатах, затрудняет выяснение степени допустимости принятого приближения.

Упростить решение Фурье позволяет использование параметризованных переменных, которые могут быть названы дугowymi координатами [1], [9]. Они позволяют радикально упростить исходные уравнения электромагнитного поля, приведя уравнения Максвелла для составляющих векторов поля к каноническому виду, присущему им в декартовых координатах. Дуговые координаты представляют собой смещения вдоль координатных линий  $s_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ , на криволинейных поверхностях, образуемых системой ортогональных криволинейных координат  $y_p$ , служащих параметрами дуговых координат. Упрощение исходных уравнений Максвелла для составляющих векторов поля обязано присущим дуговым координатам локальным масштабам – коэффициентам Ламе  $h_p$  вдоль всех координатных линий  $s_p$  на криволинейных поверхностях  $y_p = \text{const}$ . Это свойство дуговых координат обусловлено "переносом" коэффициентов Ламе из уравнений Максвелла в структуру используемых переменных. Запись уравнений Максвелла в указанных координатах позволяет без затруднений разделить эти уравнения для каждой составляющей векторов поля в ортогональной системе координат  $y_p$ , а также ввести в любой из них векторные потенциалы по единому правилу.

Далее приводятся условия задачи и ее решение методом Фурье в дуговых координатах для первичного поля нити тока, расположенной в пространстве, окружающем бесконечный цилиндр<sup>2</sup>.

*Условия задачи в дуговых координатах.* Для фиксации положения нити стороннего тока относительно цилиндра и в дальнейшем для удобства формулировки граничных условий на его поверхности вводится цилиндрическая система координат  $y_1, y_2, y_3 = z$  (рис. 1, а), где  $y_1$  – радиальная координата, описывающая поверхность облучаемого цилиндра уравнением  $y_1 = \alpha$ , на которой расположена нить тока, уравнением  $y_1 = \beta$  ( $\beta > \alpha$ );  $y_2$  – угловая координата, являющаяся функцией угла  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ), а ось  $z$  системы цилиндрических координат совпадает с осью облучаемого цилиндра.

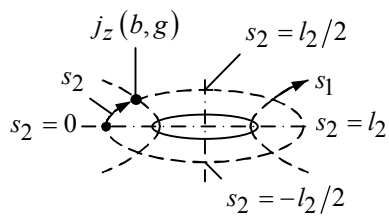
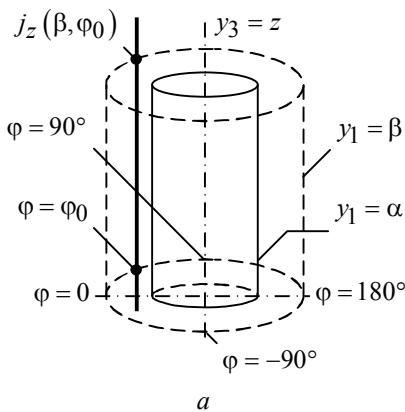


Рис. 1

Нить электрического синфазного стороннего тока  $j_z$ , параллельная оси  $z$ , возбуждает единственную составляющую векторного потенциала электромагнитного поля  $A_z$  ( $A_1 = A_2 = 0$ ), независимую от координаты  $z$  и удовлетворяющую в дуговых координатах неоднородному уравнению [9]:

$$\partial^2 A_z / \partial s_1^2 + \partial^2 A_z / \partial s_2^2 + k^2 A_z = -j_z(s_1, s_2),$$

<sup>2</sup> Решение этой задачи для вторичного поля бесконечного цилиндра, облучаемого нитью тока, приведено в [10] и [1].

(1)

где  $0 \leq s_1 < \infty$  и  $-l_2 \leq s_2 \leq l_2$  – дуговые координаты;  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \omega^2 \mu \varepsilon' [1 - i(\sigma/\omega \varepsilon')]$  – волновое число ( $\omega$  – угловая частота электромагнитных колебаний стороннего (первичного) источника;  $\mu$ ,  $\varepsilon'$  – абсолютные значения магнитной и диэлектрической проницаемостей среды распространения волны;  $\sigma$  – ее удельная проводимость); зависимость векторов поля от времени определяется функцией  $\exp(i\omega t)$ .

Дуговые координаты определяются выражениями (рис. 1, б)

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \int_0^{y_1} h_1 [x, y_2(\varphi) = \text{const}] dx, \quad 0 \leq y_1 < +\infty; \\ s_2 &= \int_0^\varphi h_2 [y_1 = \text{const}, y_2(x)] dx, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ l_2 &= \int_0^\pi h_2 [y_1 = \text{const}, y_2(\varphi)] d\varphi. \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

В выражениях (2)  $h_1$ ,  $h_2$  – метрические локальные коэффициенты Ламе;  $y_1$ ,  $y_2$  – ортогональные криволинейные координаты на плоскости  $z = \text{const}$ ;  $l_2$  – полупериметр нормального сечения цилиндрической координатной поверхности  $y_1 = \text{const}$  плоскостью  $z = \text{const}$ .

Составляющие векторов поля магнитного типа (относительно радиальной координаты его распространения  $s_1$ ), возбуждаемые нитью электрического тока  $j_z$ , связаны с векторным потенциалом  $A_z$  выражениями [9]:

$$E_z = -ikWA_z; H_1 = \partial A_z / \partial s_2; H_2 = -(\partial A_z / \partial s_1); E_1 = E_2 = H_z = 0, \quad (3)$$

где  $W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  – волновое сопротивление свободного пространства.

Граничные условия для векторного потенциала  $A_z$  на поверхности цилиндра  $y_1 = \alpha$ , облучаемого первичным полем (3), вытекают из граничных условий для касательных составляющих векторов  $E_z$  и  $H_2$ <sup>3</sup>:

$$\mu_1 (A_{\text{пад}} + A_{\text{отр}}) = \mu_2 A_{\text{пр}}; \partial A_{\text{пад}} / \partial s_1 + \partial A_{\text{отр}} / \partial s_1 = \partial A_{\text{пр}} / \partial s_1.$$

*Первичное поле в криволинейных координатах.* Составляющая векторного потенциала  $A_z$  первичного поля, возбуждаемого нитью стороннего тока  $j_z$ , является частным решением неоднородного уравнения (1).

Полагая, что диаметр поперечного сечения нити тока близок к нулю, плотность тока  $j_z$  может быть представлена дельта-функциями. В дуговых координатах  $s_p$  объемная плотность стороннего тока, постоянного вдоль координаты  $z$ ,

$$j_z(s_1, s_2) = J_z \delta(s_1 - b_0) \delta(s_2 - g) \quad (4)$$

<sup>3</sup> Индексы "пад", "отр", "пр" указывают на падающую, отраженную и прошедшую волны соответственно. В дальнейшем поля падающей и отраженной волн именуются также первичным и вторичным (или рассеянным) полями соответственно.

выражается через линейную плотность протекающего по нити тока  $J_z$  и дельта-функции в точке пересечения линий  $s_1$  и  $s_2$ , лежащих на плоскости  $z = \text{const}$ , где

$$b_0 = s_1(\beta) = \int_0^\beta h_1[y_1, y_2(\varphi = \varphi_0)] dy_1; \quad g = s_2(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} h_2[y_1 = \beta, y_2(\varphi)] d\varphi.$$

Для получения частного решения уравнения (1) функция первичного источника  $j_z$  (4) представляется в виде ряда Фурье по собственным функциям соответствующего ему однородного уравнения Гельмгольца. Собственные колебания возбуждаются на замкнутой цилиндрической поверхности  $y_1 = \beta$  в интервале значений  $-l_2(\beta) \leq s_2 \leq l_2(\beta)$ , где  $l_2(\beta)$  – полупериметр нормального сечения этой поверхности плоскостью  $z = \text{const}$ . Поскольку функция  $j_z$  четная по переменной  $s_2$ , она может быть разложена в ряд Фурье по косинусам:

$$j_z(s_1, s_2) = \frac{q_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} q_m(s_1) \cos[w_m(\beta) s_2(\beta)]; \quad (5)$$

$$q_m(s_1) = \frac{2}{l_2(\beta)} \int_0^{l_2(\beta)} j_z \cos[w_m(\beta) x] dx = 2J_z \delta(s_1 - b_0) \frac{\cos[w_m(\beta) g]}{l_2(\beta)}, \quad (6)$$

где  $w_m(\beta) = m\pi/l_2(\beta)$  – собственные значения на поверхности  $y_1 = \beta$ .

Это разложение представляется суперпозицией гармоник – бесконечным спектром парциальных первичных волн, распространяющихся навстречу друг другу от одного и того же источника – нити тока, лежащей на этой же поверхности. Колебания таких волн когерентны, а следовательно, интерферируют между собой, создавая стоячие волны. Распределение стоячих волн на координатной поверхности  $y_1 = \beta$  (вспомогательной – по терминологии Гюйгенса) является распределением "вторичных" источников первичного поля, дающих начало дальнейшему волновому процессу. При этом поверхность  $y_1 = \beta$ , как и любая другая замкнутая координатная поверхность  $y_1 = \text{const}$  в дуговых координатах, является поверхностью равных фаз, т. е. волновой поверхностью [1].

Решение для составляющей векторного потенциала  $A_z$  представляется разложением, аналогичным (5):

$$A_z(s_1, s_2) = \frac{R_0(s_1)}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(s_1) \cos[w_m(\beta) s_2(\beta)]. \quad (7)$$

Коэффициенты  $R_m$  этого разложения определяются подстановкой рядов (5) и (7) в уравнение (1) и приравниванием коэффициентов при собственных функциях  $\cos[w_m(\beta) s_2(\beta)]$ . Это приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$R_m'' + k_m^2 R_m = -q_m, \quad (8)$$



где  $k_m^2 = k^2 - w_m^2$  – волновые числа парциальных волн номера  $m$ , распространяющихся вдоль радиальных координатных линий  $s_1$  ( $k$  – волновое число, характеризующее частоту вынужденных колебаний первичного источника  $j_z$ ;  $w_m$  – собственные значения, обуславливающие частоты собственных колебаний, возбуждаемых на волновых поверхностях  $y_1 = \text{const}$ , ортогональных к направлениям радиальных линий  $s_1$ ).

Частные решения уравнений (8) определяются методом вариации постоянных:

$$R_m(s_1) = \mp \frac{i}{2} \frac{\exp(\mp i k_m s_1)}{k_m(\beta)} \int_0^b q_m(x) \exp(\pm i k_m x) dx$$

или, принимая во внимание (6),

$$R_m(s_1) = i J_z \frac{\cos[w_m(\beta)g]}{k_m(\beta)l_2(\beta)} \begin{cases} -\exp\{-i[k_m s_1 - k_m(\beta)b]\}, & b < s_1 < +\infty; \\ +\exp\{-i[k_m(\beta)b - k_m s_1]\}, & b > s_1 > 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $b = \int_0^\beta h_1[y_1, y_2(\varphi) = \text{const}] dy_1$  – величина в общем случае переменная, зависящая от угла  $\varphi$ , определяющего точки координатной линии  $s_2$ , проходящей через заданную точку первичного тока  $s_1 = b_0$  ( $y_1 = \beta$ ,  $y_2 = \varphi_0$ ,  $z = \text{const}$ ).

Из решения для коэффициентов разложения (9) векторного потенциала (7) следует, что первичное поле переносится в окружающее пространство вторичными парциальными волнами, берущими начало на волновой поверхности, возбуждаемой вторичными источниками, и распространяющимися вдоль радиальных линий  $s_1$  цилиндрической системы координат. При этом парциальные волны распространяются от поверхности  $y_1 = \beta$  в двух радиальных направлениях – как в сторону бесконечных значений  $b < s_1 < +\infty$ , так и в сторону начала координат  $b > s_1 > 0$ .

Верхняя строка (9) – "уходящие" волны, расходящиеся от этой волновой поверхности в сторону однородного и безграничного пространства, где поле этих волн удовлетворяет при  $ks_1 \rightarrow \infty$  условию излучения в дальней зоне и может считаться локально-плоским.

Нижняя строка – "приходящие" волны, сходящиеся к поверхности облучаемого тела, находящегося в окрестности начала координат. Как бы далеко от первичного источника облучаемое тело ни находилось, область вблизи от него нельзя назвать дальней зоной в привычном для этого понятия смысле. В отличие от поля в области дальней зоны, образуемой расходящимися волнами, структура поля сходящихся волн неоднородна – она имеет локальный характер. Это означает, что поле в каждой точке данной области зависит от формы и материала выпуклого тела. Заметим, что при облучении выпуклого тела с непрерывно меняющейся кривизной локальные свойства первичного поля в наибольшей степени проявляются вблизи его "острых" краев, где и возникают "краевые эффекты". В этом случае вполне

адекватной характеру поля сходящихся волн оказывается локальная метрика дуговых координат, обусловленная локальными масштабными коэффициентами Ламе (2).

Далее приводятся выражения для векторного потенциала и составляющих векторов первичного поля только в области сходящихся волн, падающих на облучаемое тело, т. е. при  $b > s_1 > 0$ . Составляющую векторного потенциала (7) в этой области определяет нижняя строка (9):

$$A_z(s_1, s_2) = iJ_z \left( \frac{\exp[-ik(b - s_1)]}{2kl_2(\beta)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos[w_m(\beta)g] \cos[w_m(\beta)s_2(\beta)]}{k_m(\beta)l_2(\beta)} \exp\{-i[k_m(\beta)b - k_ms_1]\} \right).$$

Это выражение представляет значение  $A_z$  на произвольном расстоянии между первичным источником и цилиндром  $y_1 = \alpha$ .

При значительном удалении источника первичного поля (т. е. при  $kb \rightarrow \infty$ , когда  $kl_2(\beta) \cong \pi kb \rightarrow \infty$ ) имеем  $k_m(\beta)b \rightarrow kb \rightarrow \infty$  и  $k_m(\beta)l_2(\beta) \rightarrow kl_2(\beta) \rightarrow \infty$ , что позволяет вынести сомножитель  $\frac{\exp[-ik_m(\beta)b]}{k_m(\beta)l_2(\beta)}$  из под знака суммы. Тогда выражение для составляющей векторного потенциала первичного поля примет вид

$$A_z(s_1, s_2) = \frac{i}{\pi} J_z \frac{\exp(-ikb)}{kb} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \cos[w_m(\beta)g] \cos[w_m(\beta)s_2(\beta)] \exp(+ik_ms_1) \right\}. \quad (10)$$

Переход от векторного потенциала (10) к выражениям для составляющих векторов первичного поля выполняется соотношениями (3):

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{W}{\pi} J_z \frac{\exp(-ikb)}{b} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \cos[w_m(\beta)g] \cos[w_m(\beta)s_2(\beta)] \exp(+ik_ms_1) \right\}; \\ H_2 &= \frac{1}{\pi} J_z \frac{\exp(-ikb)}{b} \left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{k_m(s_1)}{k} \cos[w_m(\beta)g] \cos[w_m(\beta)s_2(\beta)] \exp(+ik_ms_1) \right\}; \\ H_1 &= -\frac{iJ_z}{kl_2(\beta)} \frac{\exp(-ikb)}{b} \left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} m \cos[w_m(\beta)g] \sin[w_m(\beta)s_2(\beta)] \exp(+ik_ms_1) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Выражения (11) для составляющих векторов первичного поля представляют суперпозицию сходящихся парциальных волн, распространяющихся вдоль радиальных линий  $s_1$  в области  $b > s_1 > 0$ . Эта область занимает пространство между двумя волновыми поверхностями – от вспомогательной поверхности  $y_1 = \beta$ , возбуждаемой вторичными источниками Гюйгенса, до поверхности облучаемого тела  $y_1 = \alpha > 0$ . Пути распространения волн, ортогональных к волновым поверхностям, в геометрической оптике называют лучами, определяемыми как траектории, удовлетворяющие принципу Ферма.

Следует отметить, что метод Фурье, использованный при определении выражений для первичного поля (11), (12), позволил:

- установить связь между заданным сторонним источником первичного поля и заменяющей его суперпозицией вторичных источников;
- однозначно определить значения амплитуд и фаз первичных волн на возбуждаемой ими волновой поверхности  $y_1 = \beta$  ;
- установить характер распространения парциальных волн, сходящихся от волновой поверхности  $y_1 = \beta$  к поверхности облучаемого тела.

Отсюда можно заключить, что метод Фурье при решении такого рода задач прямым путем приводит к строгой математической формулировке основной идеи принципа Гюйгенса–Френеля.

Сопоставление задачи, решаемой приближенно в предположении, что на выпуклое тело падает плоская волна [6], с задачей об облучении бесконечного цилиндра первичным полем удаленного от него источника, решаемой строгим методом разложения по собственным функциям в дуговых координатах, приводит к следующим выводам.

В случае, когда исходят из того, что выпуклое тело облучается плоской волной с заданного направления, на поверхности тела образуется две зоны – освещенная и теневая (с полосой полутени между ними). Основанием для применения приближенного метода обычно служит малость тех или иных параметров, присущих задаче. Одним из них является длина волны в пустоте в сравнении с главными радиусами кривизны поверхности облучаемого тела. В предельном случае малых длин волн на освещенной стороне тела могут быть применены законы геометрической (прямолинейной лучевой) оптики. При этом поле, отраженное от поверхности тела, с большой точностью подчиняется законам отражения Френеля. Однако за пределами освещенной зоны приближения, даваемого геометрической оптикой, оказывается недостаточно, и возникает проблема дифракции – огибания волной облучаемого препятствия, приводящая к большим затруднениям в выборе метода ее решения.

Метод Фурье, используемый при строгом подходе к решению поставленной задачи, изменяет установившееся представление о характере первичного поля, облучающего выпуклое тело. В процессе решения этой задачи становится очевидным, что сторонний источник первичного поля в согласии с принципом Гюйгенса сначала "выполняет" промежуточную функцию, которая состоит в возбуждении вторичных источников данного поля на некоторой (вспомогательной) волновой поверхности. И уже от этой поверхности распространяются парциальные волны, сходящиеся к облучаемому телу. Поле сходящихся волн освещает всю его поверхность, не оставляя на ней теневых участков. Вследствие такой особенности формирования первичного поля понятие о дифракции в "узком" смысле [6], рассматриваемой как огибание границы раздела между освещенной и теневой областями, теряет смысл.

Закономерности первичного поля, описываемые решением, полученным методом Фурье, характеризуются дифракцией в "широком" смысле, трактуемой как явления, происходящие при распространении волн в неоднородной среде [11].

Неоднородность среды, нарушающая прямолинейное распространение волн источника излучения (точечного или линейного), вызывается присутствием в ней облучаемого тела [12]. Присутствие тела в поле источника влечет за собой возбуждение в окружающем

его пространстве вторичных источников Гюйгенса, дающих начало волнам, сходящимся к поверхности этого тела. При этом локальными, т. е. неоднородными свойствами обладают в равной степени как структура сходящихся волн первичного поля, так и окружающее облучаемое тело пространство (среда), отнесенное к дуговым координатам.

Возбуждаемое в этих условиях вторичное поле, как следует из [10] и [1], описывается коэффициентами отражения Френеля. Отражение поля по законам Френеля составляет основной закон геометрической (лучевой) оптики, определяющий амплитуды полей на границе раздела сред. Лучами, вдоль которых распространяются парциальные волны как падающего (первичного), так и отраженного (вторичного) полей, служат радиальные координатные линии, ортогональные к замкнутым координатным поверхностям рассматриваемой системы криволинейных координат, которые в дуговых координатах служат волновыми поверхностями.

### Список литературы

1. Зражевская И. Н. Решение задач электродинамики в дуговых координатах. СПб. 2008. 75 с. – Деп. в ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова 28.03.08. ДР № 4115.
2. Гюйгенс Х. Трактат о свете / ОНТИ НКТП. М.–Л., 1935. 171 с.
3. Ландсберг Г. С. Оптика. 5-е изд. Т. 3. М.: Наука, 1976. 926 с.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
5. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. 581 с.
6. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 517 с.
7. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
8. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.–Л.: Энергия, 1967. 376 с.
9. Зражевская И. Н. Уравнения Максвелла в дуговых координатах // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2002. Вып. 1. С.3–11.
10. Зражевская И. Н. Рассеяние цилиндра, облучаемого полем нити тока // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2007. Вып. 4. С. 3–13.
11. Горелик Г. С. Колебания и волны. М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. 572 с.
12. Хайкин С. Э. Волны // Физический энциклопедический словарь. Т. 1. М.: Сов. энцикл., 1960. С. 312–316.

I. N. Zrazhvskaia

Acad. A. N. Krylov central scientific research institute (Saint-Petersburg)

### Huygens–Frenel principle in the Fourier strict formulation

*Vigorous decision of a problem on a primary field of a thread of the current irradiating the remote infinite cylinder is considered. It is established that the decision executed by a Fourier method in arc coordinates represents a field picture based on Huygens ideas about secondary sources and on Frenel ideas about an interference of these sources radiated waves. On an example of a considered problem it is shown that secondary sources of primary fields cover the whole surface of irradiated cylinder. Owing to this feature of the primary field irradiating a convex body, a secondary field on its whole surface submits to Frenel reflection laws.*

Primary field, secondary sources, waves interference, reflection laws

Статья поступила в редакцию 10 марта 2009 г.



**Теория сигналов**

УДК 621.3.011.72

**Ю. А. Бычков**

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет "ЛЭТИ"

**С. В. Щербаков, А. А. Шумаков**

Псковский вольный институт

## Расчет динамики линейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределенными параметрами на основе интегрального преобразования Лапласа и функционально-степенных рядов

*Предложен вычислительный алгоритм анализа динамики линейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределенными параметрами. Вычислительную основу алгоритма составляет расчетная схема аналитически-численного метода. Приведен пример применения предложенного алгоритма.*

**Линейные электрические цепи, нестационарные распределенные параметры, аналитически-численный метод, шаг расчета, ряд Тейлора, преобразование Лапласа**

Задача анализа динамики линейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределенными параметрами характеризуется широким многообразием приложений, что обуславливает актуальность и совершенствование расчетных схем и вычислительных алгоритмов ее решения [1], [2]. В общем случае динамику цепей выделенного класса описывают линейные неоднородные дифференциальные уравнения в частных производных с нестационарными коэффициентами. Поиск решений таких уравнений динамики в общем случае представляет собой сложную вычислительную задачу. Сложность этой задачи в не-малой степени определяется необходимостью согласования граничных и начальных условий, что, в свою очередь, является определяющим для доказательства существования и единственности искомого решения уравнения динамики в том или ином классе функций [2], [3].

Среди многообразных подходов к анализу динамики линейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределенными параметрами особое место занимают подходы, основанные на использовании интегральных преобразований [4]. При использовании интегральных преобразований вычислительная схема решения задачи анализа динамики цепей с распределенными параметрами, изначально характеризуемая двумя независимыми переменными, предполагает возможность исследования динамических свойств цепи последовательно и автономно относительно этих независимых переменных. При этом двукратное использование в расчетной схеме анализа динамики цепи интегрального преобразования позволяет эквивалентно перевести исходную задачу сначала в класс динамических задач с одной независимой переменной, а затем в класс алгебраических задач относительно изображений искомых решений уравнений динамики. В настоя-

щей статье реализация такого вычислительного приема рассматривается на основе расчетной схемы аналитически-численного метода анализа и параметрического синтеза нелинейных неавтономных электрических цепей с сосредоточенными параметрами [5].

Прежде чем приступить к формированию вычислительного алгоритма анализа динамики линейных нестационарных электрических цепей с распределенными параметрами, опишем расчетную схему аналитически-численного метода анализа динамики нелинейных неавтономных электрических цепей с сосредоточенными параметрами.

**Краткое описание аналитически-численного метода.** В общем случае динамику нелинейных неавтономных электрических цепей с сосредоточенными параметрами описывает обыкновенное нелинейное интегрально-дифференциальное уравнение с нестационарными коэффициентами:

$$A(D)x(t) = G(D)f(t) + H(x, f, t), \quad (1)$$

где  $D$  – оператор обобщенного дифференцирования;  $A(D)$  – квадратная матрица порядка  $L_x$  с полиномиальными от  $D$  и  $D^{-1}$  элементами ( $D^{-1}$  – оператор интегрирования до  $t$ , нижний предел которого есть предначальный момент времени в каждом интервале интегрирования);  $x(t)$  и  $f(t)$  – матрицы-столбцы реакций и внешних воздействий цепи соответственно;  $G(D)$  – прямоугольная матрица с размерами  $L_x \times L_f$  с полиномиальными от  $D$  и  $D^{-1}$  элементами;  $H(x, f, t)$  – матрица-столбец со строками в виде сумм произведений следующих сомножителей (в произвольных дробно-рациональных степенях): нестационарных параметров цепи, производных любого порядка и интегралов любой кратности (начиная с нулевых) от ее реакций и внешних воздействий.

Расчетная схема аналитически-численного метода решения уравнения (1) состоит из двух частей: аналитической и численной. Аналитическая часть метода предназначена для формирования на каждом шаге расчета описания искомого решения  $x_l(t)$ ,  $l \in [1, L_x]$ , в виде обобщенной функции с регулярной составляющей  $x_l^+(t)$ , описываемой функционально-степенным рядом.

На текущем шаге расчета искомое решение  $x_l(t)$ ,  $l \in [1, L_x]$ , уравнения (1) в общем случае описывает обобщенная функция

$$x_l(t) = x_l^-(t) + x_l^+(t) = \sum_{j=0}^{-J_l} S_{lj} \delta_j(t) + \sum_{i=0}^{\infty} R_{li} \frac{t^i}{i!}, \quad (2)$$

где  $x_l^-(t)$  – сингулярная составляющая искомого решения  $x_l(t)$ ;  $J_l \in \mathbb{Z}$  – порядок разложения ( $\mathbb{Z}$  – множество целых чисел);  $\delta_j(t)$  – импульсные функции различных порядков;  $S_{lj}$  – весовые коэффициенты импульсных функций, определенные в начальной для рассматриваемого шага расчета точке с абсциссой  $t = 0^+$ ;  $R_{li}$  – коэффициенты разложения регулярной составляющей решения в функционально-степенной ряд в точке с той же абсциссой.

Аналитическую часть метода начнем с приведения уравнения (1) к виду, допускающему использование интегрального преобразования Лапласа. Для этого описание каждой из строк матрицы-столбца  $H(x, f, t)$  нелинейной части уравнения (1) в правых полуокрестностях точек с абсциссой  $t = 0^+$  эквивалентным образом приведем к описанию в виде степенного ряда с пока неизвестными коэффициентами. Полученное в итоге уравнение имеет вид

$$A(D)x(t) = G(D)f(t) + T(t), \quad (3)$$

где  $T(t)$  – матрица-столбец, тождественно заменившая матрицу  $H(x, f, t)$ , строки которой представляют собой степенные ряды.

Выполнив над уравнением (3) обобщенное преобразование Лапласа, сформируем линейное алгебраическое уравнение относительно изображений искомых решений  $x_r(t)$ ,  $r = 1, 2, \dots, L_x$ , уравнения (1). Решив его по правилу Крамера и приведя подобные члены, для изображения  $X_l(p)$  искомого решения  $x_l(t)$ ,  $l \in [1, L_x]$ , уравнения (1) получим описание

$$X_l(p) = \frac{B'_l(p)}{A(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} B'_{l(N+J_l-i)} p^{N+J_l-i}}{\sum_{i=0}^N A_i p^i}, \quad (4)$$

где  $B'_l(p)$ ,  $A(p)$  – полиномы;  $N \in \mathbb{N}$  – порядок ( $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел).

Найденная дробно-рациональная функция (4) в общем случае при  $J_l \geq 0$  неправильная. Это обусловлено тем, что в зависимости от структуры цепи, ее параметров и характера внешних воздействий отдельные коэффициенты  $B'_{lr}$ ,  $A_r$ , в том числе при старших степенях переменной  $p$ , могут быть равны нулю. Это может привести к тому, что в некоторых случаях порядок полинома  $A(p)$  в знаменателе окажется ниже старшей положительной степени переменной  $p$  ряда  $B'_l(p)$  в числителе дробно-рациональной функции (4).

Для восстановления по известному изображению  $X_l(p)$  оригинала – искомого решения  $x_l(t)$  – разложим неправильную дробно-рациональную функцию (4) в окрестности бесконечно удаленной точки в ряд Лорана. Главная часть сформированного ряда Лорана описывает целую рациональную функцию  $X_l^-(p)$ . Правильная часть этого ряда есть правильная дробно-рациональная функция  $X_l^+(p)$ , которая получится после выделения из функции, описываемой равенством (4), целой рациональной функции  $X_l^-(p)$ .

Итак, для изображения  $X_l(p)$  искомого решения  $x_l(t)$  справедливо следующее представление:

$$X_l(p) = X_l^-(p) + X_l^+(p) = \sum_{j=0}^{-J_l} S_{lj} p^{-j} + \sum_{i=1}^{\infty} B_{l(N-i)} p^{N-i} \Big/ \sum_{i=0}^N A_i p^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{-J_l} S_{lj} p^{-j} + \left( \sum_{i=0}^{\infty} B_{l(N-i-1)} p^{N-i} / \sum_{i=0}^N A_i p^i \right) \left( \frac{1}{p} \right) = \sum_{j=0}^{-J_l} S_{lj} p^{-j} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{R_{li}}{p^{i+1}}. \quad (5)$$

Для вычисления коэффициентов  $S_{lj}$ ,  $B_{l(N-i)}$ ,  $R_{li}$  в работе [5] предложены следующие рекуррентные формулы:

$$S_{l(-J_l)} = B'_{l(N+J_l)} / A_N ;$$

$$S_{l(-J_l+j)} = \left[ B'_{l(N+J_l+j)} - \sum_{k=0}^{j-1} S_{l(-J_l+k)} A_{N-j+k} \right] / A_N, \quad j=1, 2, \dots, J_l ; \quad (6)$$

$$B_{l(N-i)} = B'_{l(N-i)} - \sum_{k=0}^{N-i} S_{l(-N+i+k)} A_k, \quad i=1, 2, \dots; \quad S_{l(-r)} = 0, \quad r > J_l ;$$

$$R_{l0} = B_{l(N-1)} / A_N ;$$

$$R_{li} = \left[ B_{l(N-1-i)} - \sum_{k=0}^{i-1} R_{lk} A_{N-i+k} \right] / A_N, \quad i=1, 2, \dots \quad (7)$$

Изображению искомого решения  $X_l(p)$  в форме, представленной последним из равенств (5), соответствует оригинал – искомое решение  $x_l(t)$ ,  $l \in [1, L_x]$  уравнения (1), описываемое равенством (2), причем все коэффициенты этого описания теперь известны.

Численная часть метода предназначена для вычисления приближенных значений регулярных составляющих искомого решения в дискретные моменты времени на основе принципа "аналитического продолжения". В текущем интервале расчета численная часть начинается с выбора величины шага, не превышающей наименьшего из радиусов сходимости рядов Тейлора для регулярных составляющих искомого решения. В конце найденного шага расчета приближенное значение регулярной составляющей  $x_l^+(t)$  искомого решения  $x_l(t)$ ,  $l \in [1, L_x]$  вычисляем как сумму полинома Тейлора, порядок которого определяет заданный уровень предельной локальной погрешности расчета [5]. Полученные при вычислении приближенного значения регулярной составляющей решения  $x_l^+(t)$  локальную и полную погрешности расчета оценим с помощью формул, приведенных в работе [5]. После выполнения текущего шага расчета ось ординат перенесем по оси времени на величину шага и процедуру метода повторим, начиная с ее аналитической части. В качестве предначальных условий для следующего шага расчета при этом примем вычисленные на предыдущем шаге приближенные значения регулярных составляющих искомого решения  $x_r(t)$ ,  $r=1, 2, \dots, L_x$ , и их производных.

**Вычислительный алгоритм анализа динамики линейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределенными параметрами.** Динамику линейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределенными параметрами в ограниченных интервалах по времени  $t$  и по пространственной координате  $x$  описывает следующее линейное дифференциальное уравнение в частных производных:



$$A(\partial t, \partial x) z(t, x) = G(\partial t, \partial x) f(t, x), \quad (8)$$

где  $A(\partial t, \partial x)$  – квадратная матрица порядка  $L_x$  с полиномиальными от  $\partial t$  и  $\partial x$  элементами, причем коэффициенты этих полиномов в общем случае представляют функции времени  $t$  или пространственной координаты  $x$ , описывающие нестационарные по  $t$  или неравномерно распределенные по  $x$  параметры цепи соответственно;  $z(t, x)$  и  $f(t, x)$  – матрицы-столбцы реакций и внешних воздействий цепи соответственно;  $G(\partial t, \partial x)$  – прямоугольная матрица с размерами  $L_x \times L_f$  с полиномиальными от  $\partial t$  и  $\partial x$  элементами.

Заметим, что матрица  $A(\partial t, \partial x)$  уравнения (8) не содержит смешанных производных. Предлагаемый вычислительный алгоритм решения уравнения (8) при заданных граничных  $z_l(t, 0)$ ,  $t \in [t_0, T]$  и начальных  $z_l(0, x)$ ,  $x \in [x_0, X]$  условиях состоит из двух частей: аналитической и численной. В аналитической части по аналогии с описанием (2) формируем описание искомого решения  $z_l(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  в следующем виде:

$$z_l(t, x) = z_l^-(t, x) + z_l^+(t, x), \quad (9)$$

где  $z_l^-(t, x)$  – сингулярная составляющая искомого решения, определяемая как сумма с некоторыми весовыми коэффициентами произведений импульсных функций  $\delta_0(t)$  и  $\delta_0(x)$  или их обобщенных производных некоторых порядков;  $z_l^+(t, x)$  – регулярная составляющая искомого решения.

Для описания регулярной составляющей  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  искомого решения  $z_l(t, x)$  уравнения (8) авторы настоящей статьи предлагают использовать степенной ряд двух независимых переменных, имеющий две эквивалентные формы описания:

$$z_l^+(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{li}(t) (x^i / i!), \quad (10)$$

где

$$R_{li}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} R_{lj}^{[i]} (t^j / j!) \quad (11)$$

и

$$z_l^+(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{li}(x) (t^i / i!), \quad (12)$$

где

$$R_{li}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_{lj}^{[i]} (x^j / j!). \quad (13)$$

Отметим, что при  $i = 0$  степенные ряды (11) и (13) описывают заданные граничные  $z_l(t, 0)$  и начальные  $z_l(0, x)$  условия соответственно. Аналитическую часть предлагаемо-

го вычислительного алгоритма начнем с приведения уравнения (8) к виду, допускающему использование интегрального преобразование Лапласа. Выполнив все операции, диктуемые процедурой аналитической части аналитически-численного метода [5], получим

$$B(\partial t, \partial x)z(t, x) = G(\partial t, \partial x)f(t, x) + T(t, x), \quad (14)$$

где  $B(\partial t, \partial x)$  – матрица, полученная из матрицы  $A(\partial t, \partial x)$  выделением из ее элементов коэффициентов, определяемых неравномерно распределенными или нестационарными параметрами цепи;  $T(t, x)$  – матрица-столбец, каждая из строк которой представляет обобщенный степенной ряд двух независимых переменных, описывающий сумму произведений, образованных указанными коэффициентами, определяемыми нестационарными или неравномерно распределенными параметрами цепи, и искомыми решениями  $z_r(t, x)$ ,  $r = 1, 2, \dots, L$ , уравнения (8). Параметры и искомые решения должны быть предварительно описаны степенными рядами с известными и неизвестными коэффициентами.

Переход от исходного описания (8) уравнения динамики цепи к описанию (14) носит эквивалентный характер, поскольку не меняет характера внутренних координатно-параметрических взаимосвязей уравнения динамики. При этом с целью оптимизации объема вычислений, выполнив операции по формированию обобщенных степенных рядов, составляющих строки матрицы  $T(t, x)$  уравнения (14), используем формулы, приведенные в [5], и руководствуемся следующими рекомендациями. Если рассматриваемая строка матрицы  $T(t, x)$  уравнения (14) содержит произведение формально описанного степенным рядом в форме (10) искомого решения  $z_r(t, x)$ ,  $r = 1, 2, \dots, L$ , и предварительно разложенного в степенной ряд по  $x$  неравномерно распределенного параметра цепи, то коэффициенты степенного ряда – результата этого произведения определим по коэффициентам указанных степенных рядов в соответствии с методикой из [5]. При этом представление коэффициентов степенного ряда (10) в виде степенных рядов (11) в явном виде не используем. Если же строка матрицы  $T(t, x)$  содержит произведение представленного в форме (10) искомого решения  $z_r(t, x)$ ,  $r = 1, 2, \dots, L$ , и разложенного в степенной ряд по  $t$  нестационарного параметра цепи, то каждый из коэффициентов степенного ряда – результата этого произведения определим как результат произведения соответствующего ряда из (11) и ряда для нестационарного параметра цепи. В зависимости от типа означенного произведения, входящего в описание строки матрицы  $T(t, x)$  уравнения (14), рекомендации аналогичного характера справедливы и при использовании формы (12) для описания искомого решения  $z_r(t, x)$ ,  $r = 1, 2, \dots, L$ , уравнения (8).

Последующее выполнение аналитической части предлагаемого вычислительного алгоритма зависит от того, каковы проблемно-ориентированные признаки предполагаемой расчетной схемы в численной части алгоритма.

Если в дальнейшем предполагается выполнение шага расчета по независимой переменной  $t$ , то необходимо получить описание регулярной составляющей  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  искомо-

го решения  $z_l(t, x)$  в форме (10). Описания всех строк матрицы  $T(t, x)$  уравнения (14) также должны быть приведены к аналогичному описанию (10) виду, т. е. должны представлять соответствующие составные степенные ряды: внешние относительно независимой переменной  $x$  и внутренние для нестационарных коэффициентов внешних рядов относительно независимой переменной  $t$ . При этом с целью унификации последующей вычислительной процедуры уравнение (14) сначала преобразуем по Лапласу относительно независимой переменной  $t$ , а затем относительно независимой переменной  $x$ .

Если же в численной части алгоритма предполагается выполнение шага расчета по независимой переменной  $x$ , то необходимо получить описание регулярной составляющей  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  искомого решения  $z_l(t, x)$  в форме (12). При этом описания всех строк матрицы  $T(t, x)$  также приведем к виду, аналогичному описанию (12), т. е. к составным степенным рядам, относительно независимой переменной  $t$ . Распределенные в пространстве коэффициенты этих рядов определяют внутренние ряды относительно независимой переменной  $x$ . При использовании формы (12) для описания регулярной составляющей решения  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  уравнение (14) в последующем преобразуем с помощью интегрального преобразования Лапласа сначала относительно независимой переменной  $x$ , а затем относительно независимой переменной  $t$ .

Для определенности последующих преобразований предположим, что необходимо получить описание регулярной составляющей  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  искомого решения  $z_l(t, x)$  в форме (10). Тогда, выполнив над уравнением (14) последовательно два интегральных преобразования Лапласа – сначала относительно независимой переменной  $t$ , а затем относительно независимой переменной  $x$ , получим

$$B(p, q)Z(p, q) = G(p, q)F(p, q) + Q(p, q) + T(p, q), \quad (15)$$

где  $B(p, q)$ ,  $G(p, q)$  – матрицы, полученные из исходных матриц  $B(\partial t, \partial x)$ ,  $G(\partial t, \partial x)$  заменой операторов дифференцирования  $\partial t$ ,  $\partial x$  на комплексные переменные  $p$ ,  $q$  соответственно;  $Z(p, q)$ ,  $F(p, q)$  – матрицы-столбцы изображений реакций и внешних воздействий цепи соответственно;  $Q(p, q)$  – матрица-столбец начальных и граничных условий;  $T(p, q)$  – матрица-столбец, полученная из матрицы  $T(t, x)$  заменой членов  $t^k/k!$  и  $x^k/k!$  на члены  $p^{-(k+1)}$  и  $q^{-(k+1)}$  соответственно.

Решив по правилу Крамера линейное алгебраическое уравнение (15), изображение искомого решения  $z_l(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  уравнения (8) получим (по аналогии с выражением (5)) в виде

$$Z_l(p, q) = Z_l^-(p, q) + Z_l^+(p, q) = \sum_{j=0}^{-J_l} S_{lj}(p)q^{-j} + \sum_{i=1}^{\infty} B_{l(N-1)}(p)q^{N-i} \bigg/ \sum_{i=0}^N A_i(p)q^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{-J_l} S_{lj}(p)q^{-j} + \sum_{i=0}^{\infty} R_{li}(p)q^{-(i+1)}. \quad (16)$$

В описании (16) интегральному преобразованию Лапласа относительно независимой переменной  $t$  соответствует комплексная переменная  $p$ , а независимой переменной  $x$  – комплексная переменная  $q$ . Сравнительный анализ выражений (5) и (16) показывает, что принципиальное отличие последнего состоит в явной зависимости коэффициентов изображения искомого решения  $B_{l(N-i)}(p)$ ,  $S_{lj}(p)$ ,  $R_{li}(p)$  от  $p$ . Для вычисления этих коэффициентов с учетом их зависимости от комплексной переменной  $p$  по-прежнему можно использовать формулы (6), (7). Вычисленные коэффициенты представляют полиномы либо ряды Лорана по комплексной переменной  $p$ .

Результатом выполненных преобразований служит следующее изображение регулярной составляющей  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  искомого решения:

$$Z_l^+(p, q) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{li}(p)/q^{i+1}, \quad (17)$$

где

$$R_{li}(p) = \sum_{j=0}^{\infty} R_{lj}^{[i]}/p^{j+1}. \quad (18)$$

Особенность описания (17) состоит в том, что оно представляет составной ряд Лорана, каждый коэффициент которого есть соответствующий и описываемый равенством (18) ряд Лорана. Для определенности внутренние ряды Лорана (18) в окрестности бесконечно удаленной точки показаны как ряды, имеющие только правильные части, однако в общем случае не исключено существование и главных частей этих рядов или, быть может, некоторых из них. Так как внутренние ряды Лорана (18) зависят только от комплексной переменной  $p$ , а внешний ряд Лорана (17) зависит только от  $q$ , то восстановление оригинала – регулярной составляющей искомого решения  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  – может быть выполнено в два этапа. Сначала задачу обратного интегрального преобразования Лапласа решим для каждого из коэффициентов  $R_{li}(p)$ , описываемого одним из рядов Лорана (18), а затем в целом для составного ряда Лорана (17). Согласно свойствам интегрального преобразования Лапласа рядам Лорана (18) в качестве оригинала соответствуют степенные ряды (11), а составному ряду Лорана (17) – оригинал, т. е. регулярная составляющая  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  искомого решения  $z_l(t, x)$ , описываемый степенным рядом (10). Отметим, что коэффициенты степенных рядов (11) и (10) теперь известны.

Таким образом процедура аналитической части предлагаемого вычислительного алгоритма полностью исчерпана, приведя в итоге к получению для искомого решения  $z_l(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  уравнения динамики цепи (8) описания (9). Регулярная составляющая искомого решения при этом описана степенным рядом в форме (10), обеспечивая возмож-

ность последующей реализации численной части алгоритма относительно независимой переменной  $t$  – времени.

В случае необходимости реализации в численной части шага расчета по независимой пространственной координате  $x$  для описания регулярной составляющей искомого решения  $z_l(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  получена форма (12) степенного ряда.

Описание аналитической части предлагаемого алгоритма включает следующее важное дополнение. Как видно из изложенного, вопрос о существовании и о своеобразии описания сингулярной составляющей  $z_l^-(t, x)$  искомого решения  $z_l(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  уравнения (8) решается при выполнении процедуры аналитической части. Если вычисленные с учетом принятых обозначений по формуле (6) коэффициенты  $S_{lj}(p)$ , входящие в описание (16) изображения искомого решения  $z_l(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$ , таковы, что алгебраические суммы соответствующих этим коэффициентам полиномов либо главных частей рядов Лорана отсутствуют или тождественно равны нулю, а все внутренние для ряда Лорана (17) ряды Лорана не содержат главных частей, то сингулярная составляющая в искомом решении отсутствует. В противном случае сингулярная составляющая  $z_l^-(t, x)$  искомого решения  $z_l(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  существует, отражая объективную специфику собственных динамических свойств и характерных особенностей электрической цепи при заданных граничных и начальных условиях. При этом специфика описания сингулярной составляющей полностью определяется соотношениями и абсолютными значениями всех составляющих описания изображения искомого решения (16).

Численная часть предлагаемого вычислительного алгоритма решения уравнения (8) предназначена для расчета приближенных значений регулярной составляющей решения  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$ , соответствующих дискретным моментам времени  $t = t_k$ ,  $t \in [t_0, T]$  и значениям пространственной координаты  $x = x_k$ ,  $x \in [x_0, X]$ . Полученная форма описания регулярной составляющей решения  $z_l^+(t, x)$  (10) обуславливает возможность выполнения шага расчета по независимой переменной  $t$  – времени. Для этого на основе исследования сходимости числовых мажорант степенных рядов (11) в соответствии с процедурой, изложенной в [5], выбирается величина первого шага расчета  $h = h_1$  по независимой переменной  $t$ , не превышающая наименьшего из радиусов сходимости этих степенных рядов. Выбрав величину шага расчета  $h = h_1$  и ограничив ряды Тейлора (11) при  $t = h_1$  полиномами, порядки  $I_l^{[i]}$  которых удовлетворяют заданному уровню предельной абсолютной локальной погрешности расчета  $\varepsilon_l(h)$ , вычислим приближенные значения  $R_{li}(t, I_l^{[i]})$  коэффициентов  $R_{li}(t)$  степенного ряда (10):

$$R_{li}(t, I_l^{[i]}) = \sum_{j=0}^{I_l^{[i]}} R_{lj}^{[i]} \frac{h_1^j}{j!}. \quad (19)$$

Вычисление указанных приближенных значений коэффициентов носит рекуррентный характер, т. е. при вычислении приближенного значения каждого последующего коэффициента используются уже вычисленные приближенные значения предыдущих коэффициентов.

Вычисленные согласно равенствам (19) приближенные значения  $R_{li}(t, I_l^{[i]})$  коэффициентов  $R_{li}(t)$  степенного ряда (10) соответствуют значениям независимых переменных  $t = t_1 = t_0 + h_1$  и  $x = x_0$ . При  $i = 0$  равенство (19) дает приближенное значение  $z_l^+(t_1, x_0, I_l^{[0]}) = R_{l0}(t_1, I_l^{[0]})$  регулярной составляющей искомого решения  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$ , соответствующее указанным значениям независимых переменных.

С учетом результатов расчета (19) степенной ряд (10), являвшийся рядом двух независимых переменных, трансформируется в степенной ряд относительно одной независимой переменной:

$$z_l^+(t_1, x, I_l^{[i]}) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{li}(t_1, I_l^{[i]}) \frac{x^i}{i!}. \quad (20)$$

Степенной ряд (20) приближенно описывает изменение относительно независимой переменной  $x$  начального условия для следующего второго шага расчета. Исходя из постановки задачи анализа динамики цепи для второго шага расчета необходимо знание не только начального, но и граничного условий. Граничное условие для второго шага расчета при этом можно определить следующим образом. Как уже отмечалось, степенной ряд (11) при  $i = 0$  описывает граничное условие  $z_l(t, 0)$  для первого шага расчета, т. е. для абсциссы точки разложения этого ряда  $t = 0$ . Для смещения абсциссы точки разложения степенного ряда в новое дискретное значение независимой переменной  $t = t_1 = t_0 + h_1$  используем вычисление приближенных значений функции  $z_l(t, 0)$  и ее производных по известному разложению этой функции в степенной ряд (11) при  $i = 0$  [6]. Выполнив этот прием на основе операции последовательного дифференцирования степенного ряда (11) при  $i = 0$ , сформируем степенные ряды для производных функции  $z_l(t, 0)$  в виде

$$\frac{d^n z_l(t, 0)}{dt^n} = \frac{d^n R_{l0}(t)}{dt^n} = \sum_{j=n}^{\infty} R_{lj}^{[0]} \frac{t^{j-n}}{(j-n)!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Как известно [6], все степенные ряды (21) имеют одинаковый радиус сходимости. Величина первого шага расчета  $h = h_1$ , по определению не превосходя радиуса сходимости степенного ряда (21), при  $n = 0$  гарантированно не превышает общего радиуса сходимости всех остальных степенных рядов (21),  $n = 1, 2, \dots$ . Ограничив с учетом этого ряды Тейлора (21) при  $t = h_1$  полиномами, порядки которых удовлетворяют заданному уровню предельной абсолютной локальной погрешности расчета  $\epsilon_l(h)$ , в дискретный момент времени  $t = t_1 = t_0 + h_1$  можно вычислить приближенные значения коэффициентов степен-

ного ряда для граничного условия  $z_l(t, 0)$ , причем абсцисса точки разложения этого степенного ряда, как и необходимо, теперь уже  $t = t_1$ .

Определением приближенных описаний начальных и граничных условий для следующего, второго шага расчета завершается процедура численной части предлагаемого вычислительного алгоритма анализа динамики линейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределенными параметрами. Далее ось аппликат переносится по  $t$  на величину выполненного шага расчета  $h = h_1$  и описанный вычислительный алгоритм в своих аналитической и численной частях повторяется.

Процедура численной части предлагаемого алгоритма при расчете по  $x$  на основе (12) описания регулярной составляющей искомого решения  $z_l^+(t, x)$ ,  $l \in [1, L]$  полностью аналогична процедуре расчета по  $t$  на основе (10) описания этой составляющей решения. В последнем случае полученные ранее зависимости (19)–(21) преобразуются к следующему эквивалентному по содержанию и вычислительному характеру виду:

$$R_{li}(x_1, I_l^{[i]}) = \sum_{j=0}^{I_l^{[i]}} R_{lj}^{[i]} \frac{h_1^j}{j!}; \quad z_l^+(t, x_1, I_l^{[i]}) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{li}(x_1, I_l^{[i]}) \frac{t^i}{i!};$$

$$\frac{d^n z_l(0, x)}{dt^n} = \frac{d^n R_{l0}(x)}{dt^n} = \sum_{j=n}^{\infty} R_{lj}^{[0]} \frac{x^{j-n}}{(j-n)!}.$$

**Пример.** Расчет динамики линейной стационарной электрической цепи с неравномерно распределенными параметрами.

Пусть уравнение динамики цепи имеет вид

$$[a_1(\partial/\partial x) + a_2(\partial/\partial t) + a_3(x)]z(t, x) = g_1 f(t, x), \quad (22)$$

где  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -2$ ,  $a_3(x) = x = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \frac{x^i}{i!}$  ( $\gamma_0 = x_k$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_i = 0$  при  $i \geq 2$ ),  $g_1 = 0$ .

Граничные и начальные условия, разложенные в соответствующие степенные ряды, заданы следующим образом:

$$z(t, 0) = \exp(t^2/8) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \frac{t^j}{j!}, \quad \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.5, \dots;$$

$$z(0, x) = 1 = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \frac{x^j}{j!}, \quad \beta_0 = 1, \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

При таких граничных и начальных условиях уравнение (22) имеет точное решение  $z(t, x) = \exp(t^2/8 + tx/2)$ , что позволит протестировать результаты расчета динамики цепи с помощью предложенного вычислительного алгоритма [7].

Для определенности реализуем аналитическую часть алгоритма для получения описания регулярной составляющей искомого решения  $z_l^+(t, x)$  в форме (10), которую с учетом принятых обозначений преобразуем к виду

$$z^+(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(t) \frac{x^i}{i!}, \quad (23)$$

где

$$R_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[i]} \frac{t^j}{j!}. \quad (24)$$

Преобразовав уравнение (22) к виду уравнения (14), получим

$$\left[ a_1 (\partial/\partial x) + a_2 (\partial/\partial t) \right] z(t, x) = - \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) \frac{x^i}{i!}, \quad (25)$$

где  $T_0(t) = \gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[0]} \frac{t^j}{j!}$ ;  $T_1(t) = \gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[1]} \frac{t^j}{j!} + \gamma_1 \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[0]} \frac{t^j}{j!}$  и т. д. [5].

Выполнив над уравнением (25) последовательно два интегральных преобразования Лапласа (сначала относительно независимой переменной  $t$ , а затем относительно независимой переменной  $x$ ), получим

$$\left[ a_1 q + a_2 p \right] Z(p, q) = a_2 Z(0, q) + a_1 Z(p, 0) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_i(p)}{q^{i+1}}, \quad (26)$$

где  $Z(p, q)$  – изображение по Лапласу искомого решения;  $Z(0, q) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j / q^{j+1}$  – ряд Лорана для изображения начального условия;  $Z(p, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j / p^{j+1}$  – ряд Лорана для изображения граничного условия;  $T_i(p)$  – коэффициенты, полученные из коэффициентов  $T_i(t)$  заменой членов  $t^k / k!$  на  $p^{-(k+1)}$ .

Решив линейное алгебраическое уравнение (26) по правилу Крамера, получим изображение искомого решения  $Z(p, q)$ :

$$Z(p, q) = Z^-(p, q) + Z^+(p, q) = \sum_{j=0}^{-J} S_j(p) q^{-j} + \sum_{i=1}^{\infty} B_{N-i}(p) q^{N-i} \bigg/ \sum_{i=0}^N A_i(p) q^i, \quad (27)$$

где  $J = -1$ ;  $N = 1$ . Коэффициенты разложений определяются из выражений  $A_0 = a_2 p$ ;

$$B_0(p) = a_1 Z(p, 0) = a_1 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j p^{-(j+1)}; \quad B_{-1}(p) = a_2 \beta_0 - T_0(p) = a_2 \beta_0 - \gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[0]} p^{-(j+1)}; \quad B_{-2}(p) =$$

$$= a_2 \beta_1 - T_1(p) = a_2 \beta_1 - \gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[1]} p^{-(j+1)} - \gamma_1 \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[0]} p^{-(j+1)} \text{ и т. д. [5].}$$

Показатель описания (27)  $J = -1$ , что указывает на отсутствие сингулярной составляющей по  $t$  в искомом решении уравнения (22). Тогда описание изображения регулярной составляющей решения  $Z^+(p, q)$  сводится к следующему:



$$Z(p, q) = Z^+(p, q) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(p) / q^{i+1}; \quad (28)$$

$$R_i(p) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[i]} p^{-(j+1)}. \quad (29)$$

Коэффициенты  $R_i(p)$  определяются соотношениями

$$R_0(p) = B_0(p) = Z(p, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j p^{-(j+1)}, \quad R_0^{[0]} = 1, R_1^{[0]} = 0, R_2^{[0]} = 0.25, \dots;$$

$$R_1(p) = B_{-1}(p) - a_2 p R_0(p) = a_2 \beta_0 - \gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[0]} p^{-(j+1)} - a_2 R_0^{[0]} - a_2 \sum_{j=0}^{\infty} R_{j+1}^{[0]} p^{-(j+1)},$$

$$R_0^{[1]} = 0, R_1^{[1]} = 0.5, R_2^{[1]} = 0, \dots;$$

$$R_2(p) = B_{-2}(p) - a_2 p R_1(p) = a_2 \beta_1 - \gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[1]} p^{-(j+1)} - \gamma_1 \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{[0]} p^{-(j+1)} + \gamma_0 a_2 R_0^{[0]} +$$

$$+ a_2^2 R_1^{[0]} + a_2 \gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} R_{j+1}^{[0]} p^{-(j+1)} + a_2^2 \sum_{j=0}^{\infty} R_{j+2}^{[0]} p^{-(j+1)}, \quad R_0^{[2]} = 0, R_1^{[2]} = 0, R_2^{[2]} = 0.5, \dots$$

Как показали результаты расчета коэффициентов внутренних рядов Лорана (29), у этих рядов при заданных граничных и начальных условиях главные части отсутствуют. Таким образом, в искомом решении отсутствует сингулярная составляющая и по  $t$ . Выполнив двухэтапное обратное интегральное преобразование Лапласа, по известным описаниям (28), (29) изображения оригинал, т. е. искомое решение  $z(t, x) = z^+(t, x)$  уравнения (22), получим в форме составного степенного ряда (23) с известными теперь коэффициентами внутренних степенных рядов (24). На этом процедура аналитической части алгоритма исчерпана.

Численная часть алгоритма начинается с исследования сходимости числовых мажорант степенных рядов (24) и выбора на этой основе величины шага расчета  $h = h_1$  по независимой переменной  $t$  – времени. Далее ряды Тейлора (24) при  $t = h_1$  замещаются полиномами Тейлора, порядки  $l^{[i]}$  которых определяются с учетом заданного уровня предельной локальной погрешности расчета  $\varepsilon(h)$  [5]. С использованием указанных полиномов Тейлора вычисляются приближенные значения коэффициентов степенного ряда (23).

Получив эти значения, являющиеся начальным условием для следующего шага расчета, и сместив абсциссу точки разложения функции в степенной ряд, формируют приближенное описание граничного условия. На этом выполнение численной части алгоритма завершается.

Выборочные результаты анализа динамики цепи при предельных уровнях абсолютной локальной погрешности расчета  $\varepsilon(h) = 10^{-3}$ ;  $\varepsilon(h) = 10^{-5}$  и  $\varepsilon(h) = 10^{-10}$  приведены в табл. 1–3 соответственно. В таблицах использованы следующие обозначения:  $x$  и  $t$  – абсциссы и ординаты начал вынесенных в таблицу шагов расчета по  $x$  ( $h_x$ ) и по  $t$  ( $h_t$ ) со-

Таблица 1

Параметр	Значение					
$\varepsilon(h)$	$10^{-3}$					
$x$	0	0.884811	1.708036	2.629558	3.360736	4.371479
$t$	0	0.448381	0.819400	1.356550	1.817994	2.136564
$h_x$	–	0.102773	–	0.060095	–	0.057373
$h_t$	0.255736	–	0.079931	–	0.001576	–
$z(t, x)$	1	1.250441	2.189580	7.490175	32.073702	188.780552
$I^{[0]}$	5	5	6	6	6	8
$z(t, x, I^{[0]})$	1	1.250427	2.189419	7.488062	32.067299	189.763655

Таблица 2

Параметр	Значение					
$\varepsilon(h)$	$10^{-5}$					
$x$	0	1.330695	2.707257	4.057997	5.194063	5.879590
$t$	0	0.457016	0.775601	1.002200	2.012793	2.851500
$h_x$	–	0.101858	–	0.008454	–	0.018142
$h_t$	0.255736	–	0.022648	–	0.025498	–
$z(t, x)$	1	1.391221	3.080432	8.662578	309.112258	12078.8152
$I^{[0]}$	8	7	8	7	11	11
$z(t, x, I^{[0]})$	1.000000	1.391221	3.080431	8.662553	309.105125	12077.8067

Таблица 3

Параметр	Значение					
$\varepsilon(h)$	$10^{-10}$					
$x$	0	1.220226	2.483628	3.684508	5.031056	6.262377
$t$	0	0.401852	0.529260	0.717033	1.280453	2.611219
$h_x$	–	0.103126	–	0.081579	–	0.002846
$h_t$	0.255736	–	0.008124	–	0.001062	–
$z(t, x)$	1	1.303901	1.998219	3.995716	30.752130	8337.55989
$I^{[0]}$	13	12	12	13	13	15
$z(t, x, I^{[0]})$	1	1.303901	1.998219	3.995716	30.752130	8336.50958

ответственно;  $z(t, x)$  – точные значения искомого решения уравнения (22);  $I^{[0]}$  – соответствующий предельному уровню  $\varepsilon(h)$  порядок полинома Тейлора, использованного для вычисления приближенного значения  $z(t, x, I^{[0]})$  искомого решения уравнения (22).

Результаты расчета, приведенные в таблицах, показывают, что по мере уменьшения предельного уровня абсолютной локальной погрешности расчета вычисляемые приближенные значения искомого решения, как и следовало ожидать, направленно сближаются с точными значениями этого решения, отражая сходимость всей расчетной схемы.

### Список литературы

1. Лобанов А. И., Петров И. Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. Ч. 1 / МФТИ. М., 2004. 168 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. М.: Науч. мир, 2003. 316 с.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2002. 205 с.
4. Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. 2-е изд., доп. М.: Гостехиздат, 1953. 227 с.
5. Бычков Ю. А., Щербаков С. В. Расчет математических моделей динамических систем аналитически-численным методом. СПб.: Технолит, 2008. 299 с.
6. Воднев В. Г., Наумович А. Ф., Наумович Н. Ф. Математический словарь высшей школы. М.: Изд-во МПИ, 1988. 527 с.
7. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

*Ju. A. Bychkov*  
*Saint-Petersburg state elektrotechnical university "LETI"*  
*S. V. Scherbakov, A. A. Shumakov*  
*Pskov volny institute*

### **Analysis of dynamics of linear unstable electric circuits with nonuniformly distributed arguments based on integral Laplace transformation and formal power series**

*The computing analysis algorithm of linear unstable electric circuits with none uniformly distributed arguments is offered. The computing basis of algorithm is made with an analytically-numerical method. The example of the offered algorithm application is applied.*

Linear electric circuits, unstable distributed arguments, analytically-numerical method, step of calculation, Taylor's line, Laplace transform

Статья поступила в редакцию 10 апреля 2009 г.

УДК 621.372.54

**Е. Н. Червинский**  
ЗАО "СИМЕТА" (Санкт-Петербург)

## **Коррекция частотных характеристик при синтезе фильтров нижних частот**

*Разработана методика синтеза амплитудно-частотных характеристик фильтров нижних частот с заданной неравномерностью при фиксированной полосе пропускания и сохранении порядка фильтра. Введено понятие режекторной функции; определена аппроксимируемая функция. В качестве критериев оптимальности характеристик реализуемых фильтров использованы минимум отклонения функции, обратной квадрату модуля передаточной функции фильтра, от аппроксимируемой функции на интервале аппроксимации и критерий равномерного приближения на отрезке идеальной частотной характеристики. Выполнено сравнение синтезированных амплитудно- и фазочастотных характеристик с характеристиками фильтров Чебышева. Приведены примеры реализации звеньев первого и второго порядков при каскадном построении фильтров.*

### **Интервал аппроксимации, крутизна амплитудно-частотной характеристики, режекторная функция, аппроксимируемая функция, амплитудно-частотная характеристика равномерного приближения**

Основные требования, предъявляемые к амплитудно-частотным характеристикам (АЧХ) фильтров нижних частот (ФНЧ), – равномерность в полосе пропускания и большая крутизна при переходе к полосе задерживания. Наиболее равномерными (максимально плоскими) на начальном участке являются АЧХ фильтров Баттерворта, однако они имеют небольшую крутизну АЧХ в переходной области, которая возрастает только с увеличением порядка фильтра  $n$ . Более быстрый переход от полосы пропускания к полосе задерживания

обеспечивают фильтры Чебышева, что является следствием равноволнового колебательно-го характера АЧХ в полосе пропускания. Неравномерность характеристики фильтра Чебышева может быть уменьшена при сохранении порядка фильтра при одновременном расширении полосы пропускания и уменьшении крутизны АЧХ в полосе задерживания.

Цель настоящей статьи – разработка методики коррекции АЧХ в соответствии с требованиями к ФНЧ без изменения порядка и полосы пропускания фильтра.

**Интервал аппроксимации.** Рассмотрим функцию [1]:

$$y_n(\omega_H) = \left( \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3^n \sqrt{b^2} + \omega_H^2}}{\omega_H} \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin \frac{(9^n \sqrt{b^2} - \omega_H^2) \omega_H}{\sqrt{(3^n \sqrt{b^2} + \omega_H^2)^3}} \right] \right\} \right)^n, \quad (1)$$

где  $\omega_H = \omega/\omega_c$  – безразмерная нормированная частота ( $\omega$  – текущая частота;  $\omega_c$  – частота среза фильтра);  $b$  – параметр. Функция (1) тождественно равна 1 на отрезке  $[-\sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{b}]$  и принимает значение  $0 < b \leq 1$  при  $|\omega_H| = 1$ :

$$y_n(\omega_H) = \begin{cases} 1, & |\omega_H| \leq \sqrt[n]{b}; \\ b/\omega_H^n, & |\omega_H| \geq \sqrt[n]{b}. \end{cases} \quad (2)$$

Представим (2) в виде  $y_n(\omega_H) = 1/[1/y_n(\omega_H)]$ . Функция  $f_n^2(\omega_H) = 1/y_n^2(\omega_H)$  аппроксимируется полиномом  $Q_{2n}(\omega_H) = q_0 + q_2\omega_H^2 + \dots + q_{2i}\omega_H^{2i} + \dots + q_{2n}\omega_H^{2n}$  степени  $2n$ , наименее отклоняющимся в среднеквадратическом смысле от  $f_n^2(\omega_H)$  на интервале аппроксимации  $[-l, l]$ . Функция  $H_n^2(\omega_H) = 1/Q_{2n}(\omega_H)$  трактуется как квадрат модуля передаточной функции синтезируемого фильтра порядка  $n$ . Коэффициенты  $q_0, q_2, \dots, q_{2i}, \dots, q_{2n}$  полинома определяются из системы  $n+1$  уравнений [2]:

$$\sum_{i=0}^n s_{2(k+i)} q_{2i} = \int_0^l \omega_H^{2k} f_n^2(\omega_H) d\omega_H, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (3)$$

где  $s_{2k} = l^{2k+1}/(2k+1)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

При выборе интервала аппроксимации необходимо обеспечить выполнение неравенства

$$l > \sqrt[n]{b}. \quad (4)$$

Подставив в правые части системы (3) функцию  $f_n^2(\omega_H)$  и выполнив интегрирование, найдем:

$$\int_0^l \omega_H^{2k} f_n^2(\omega_H) d\omega_H = \frac{2n}{(2n+2k+1)(2k+1)} \sqrt[n]{b^{2k+1}} \left( 1 + \frac{2k+1}{2n} \frac{l^{2n+2k+1}}{\sqrt[n]{b^{2n+2k+1}}} \right). \quad (5)$$

Решение системы уравнений (3) при  $b = 1/\sqrt{2}$ ,  $l = 1$ , позволяет синтезировать передаточную функцию фильтра, квадрат модуля которой на границе полосы пропускания

$\omega_H = 1$  приближается к требуемому значению 0.5 только с увеличением степени полинома  $2n$ . Для выполнения равенства  $Q_{2n}(1) = 2$  при любых  $n$  наложим на коэффициенты полинома  $Q_{2n}(\omega_H)$  условие  $\sum_{i=0}^n q_{2i} = 2$ , тогда коэффициент  $q_0$  в уравнениях (3) может быть заменен разностью

$$q_0 = 2 - \sum_{i=1}^n q_{2i}. \quad (6)$$

Кроме того, зададим численное значение первой производной полинома  $Q_{2n}(\omega_H)$  в точке  $\omega_H = 1$ :  $Q'_{2n}(1) = \sum_{i=1}^n 2iq_{2i} = g$ , характеризующее крутизну частотной характеристики в переходной области, откуда второй коэффициент

$$q_2 = g/2 - \sum_{i=2}^n iq_{2i}. \quad (7)$$

Решив систему уравнений (3) относительно переменных  $q_{2i}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ ,  $b$  и  $l$ , можно определить все коэффициенты полинома, а также значение параметра  $b$  и интервал  $l$ , на котором достигается минимум интеграла  $I_n = \int_0^l \left\{ \left[ 1/y_n^2(\omega_H) \right] - Q_{2n}(\omega_H) \right\}^2 d\omega_H$ , с учетом условий (6) и (7). Дополнительным условием, которому должно удовлетворять решение системы, является выполнение неравенства (4).

Очевидно, что при  $n = 1$  уравнения (6) и (7) однозначно определяют коэффициенты  $q_0$  и  $q_2$ , поэтому неизвестными в системе двух уравнений (3) являются  $b$  и  $l$ .

В табл. 1 приведены выражения  $H_n^2(\omega_H)$ ,  $n = 1, \dots, 5$ , при различных значениях первой производной  $g$ . Условие (6) выполняется с точностью до четвертого знака после запятой. В последних строках таблицы для каждого  $n$  значения  $g$  выбраны близкими к предельным, при которых система имеет решение. Дальнейшее увеличение крутизны АЧХ возможно при переходе к другой аппроксимируемой функции.

Таблица 1

$n = 1$			
$g$	$b$	$l$	$H_1^2(\omega_H)$
2.20	0.555736	0.762013	$(0.900 + 1.100\omega_H^2)^{-1}$
2.25	0.598609	0.860747	$(0.875 + 1.125\omega_H^2)^{-1}$
2.30	0.633068	0.952770	$(0.850 + 1.150\omega_H^2)^{-1}$
2.35	0.661198	1.040298	$(0.825 + 1.175\omega_H^2)^{-1}$

Окончание табл. 1

$n = 2$			
$g$	$b/\sqrt{b}$	$l$	$H_2^2(\omega_H)$
5.0	$\frac{0.479043}{0.692130}$	0.755283	$(1.0207 - 0.5414\omega_H^2 + 1.5207\omega_H^4)^{-1}$
5.5	$\frac{0.593689}{0.770512}$	0.882731	$(1.0417 - 0.8335\omega_H^2 + 1.7917\omega_H^4)^{-1}$
6.0	$\frac{0.663911}{0.814807}$	0.988031	$(1.0674 - 1.1347\omega_H^2 + 2.0674\omega_H^4)^{-1}$
6.5	$\frac{0.703126}{0.838526}$	1.097884	$(1.0969 - 1.4438\omega_H^2 + 2.3469\omega_H^4)^{-1}$
$n = 3$			
$g$	$b/\sqrt[3]{b}$	$l$	$H_3^2(\omega_H)$
8.5	$\frac{0.470576}{0.777816}$	0.809335	$(0.9923 + 0.3260\omega_H^2 - 1.8790\omega_H^4 + 2.5606\omega_H^6)^{-1}$
9.5	$\frac{0.586660}{0.837135}$	0.893305	$(0.9831 + 0.5994\omega_H^2 - 2.8983\omega_H^4 + 3.3157\omega_H^6)^{-1}$
10.5	$\frac{0.660302}{0.870792}$	0.960541	$(0.9707 + 0.9301\omega_H^2 - 4.0225\omega_H^4 + 4.1216\omega_H^6)^{-1}$
11.5	$\frac{0.700191}{0.887985}$	1.092139	$(0.9551 + 1.3133\omega_H^2 - 5.2418\omega_H^4 + 4.9734\omega_H^6)^{-1}$
$n = 4$			
$g$	$b/\sqrt[4]{b}$	$l$	$H_4^2(\omega_H)$
11.0	$\frac{0.304978}{0.743134}$	0.750740	$(1.0009 - 0.0707\omega_H^2 + 0.8207\omega_H^4 - 2.9331\omega_H^6 + 3.1821\omega_H^8)^{-1}$
13.0	$\frac{0.501862}{0.841678}$	0.862708	$(1.0044 - 0.2636\omega_H^2 + 2.3441\omega_H^4 - 6.4150\omega_H^6 + 5.3301\omega_H^8)^{-1}$
15.0	$\frac{0.627824}{0.890142}$	0.931400	$(1.0112 - 0.5865\omega_H^2 + 4.5565\omega_H^4 - 10.8982\omega_H^6 + 7.9170\omega_H^8)^{-1}$
17.0	$\frac{0.698724}{0.914274}$	1.040471	$(1.0210 - 1.0200\omega_H^2 + 7.3164\omega_H^4 - 16.1568\omega_H^6 + 10.8394\omega_H^8)^{-1}$
$n = 5$			
$g$	$b/\sqrt[5]{b}$	$l$	$H_5^2(\omega_H)$
15.0	$\frac{0.312202}{0.792296}$	0.797071	$(0.9996 + 0.0448\omega_H^2 - 0.7083\omega_H^4 + 3.8065\omega_H^6 - 8.1650\omega_H^8 + 6.0225\omega_H^{10})^{-1}$
18.0	$\frac{0.511398}{0.874484}$	0.888101	$(0.9976 + 0.1999\omega_H^2 - 2.5633\omega_H^4 + 11.1752\omega_H^6 - 19.4481\omega_H^8 + 11.6387\omega_H^{10})^{-1}$
21.0	$\frac{0.639479}{0.914461}$	0.942152	$(0.9934 + 0.4979\omega_H^2 - 5.7434\omega_H^4 + 22.5324\omega_H^6 - 35.2928\omega_H^8 + 19.0126\omega_H^{10})^{-1}$
24.0	$\frac{0.707764}{0.933206}$	0.999053	$(0.9865 + 0.9483\omega_H^2 - 10.2401\omega_H^4 + 37.6407\omega_H^6 - 55.2864\omega_H^8 + 27.9511\omega_H^{10})^{-1}$

**Режекторная функция.** Выполним в (1) замену переменной на обратную величину по следующему правилу:  $\omega_H \rightarrow 1/(\beta - \omega_H)$  ( $\beta$  – произвольное число). Тогда функция  $y_n(\omega_H)$  преобразуется к виду

$$r_n(\omega_H) = \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3^n a^2 + 1/(\beta - \omega_H)^2}}{1/(\beta - \omega_H)} \sin \left\{ \frac{1}{3} \arcsin \frac{[9^n a^2 - 1/(\beta - \omega_H)^2]/(\beta - \omega_H)}{\sqrt{[3^n a^2 + 1/(\beta - \omega_H)^2]^3}} \right\} \right) \right]^n, \quad (8)$$

где  $0 < a \leq 1$  – параметр. Графики  $r_n(\omega_H)$ ,  $n = 1, \dots, 5$ , при  $\beta = 0.5$  для  $a = 1/\sqrt{2}$  и  $a = 1$  приведены на рис. 1, *a* и *б* соответственно.

Выражение (8) определяет режекторную функцию  $n$ -го порядка, монотонно возрастающую от нуля до единицы в заданном интервале и равную единице вне этого интервала. В результате преобразования частоты в выражении (2) режекторная функция может быть представлена в форме

$$r_n(\omega_H) = \begin{cases} 1, & |\beta - \omega_H| \geq 1/\sqrt[n]{a}; \\ a|\beta - \omega_H|^n, & |\beta - \omega_H| \leq 1/\sqrt[n]{a}, \end{cases} \quad (9)$$

откуда следует, что  $r_n(\beta \pm 1) = a$ . Таким образом, все функции  $r_n(\omega_H)$  проходят через точку  $a$  при  $\omega_H = \beta \pm 1$ . С ростом  $n$  функция  $r_n(\omega_H)$  в интервале  $|\beta - \omega_H| < 1$  неограниченно приближается к нулю.

**Аппроксимируемая функция.** Рассмотрим на полуинтервале  $0 \leq \omega_H < \beta$  функцию вида

$$h_n(\omega_H) = y_n(\omega_H)r_n(\omega_H) = \begin{cases} 1, & \omega_H \leq \sqrt[n]{b}; \\ b/\omega_H^n, & \sqrt[n]{b} \leq \omega_H \leq c; \\ (b/\omega_H^n)a(\beta - \omega_H)^n, & c \leq \omega_H < \beta, \end{cases} \quad (10)$$

где  $c$  – граничное значение отрезка  $[0, c]$ , на котором функция  $r_n(\omega_H) \equiv 1$ . Из выражения (9) следует, что параметры  $\beta$ ,  $c$  и  $a$  связаны соотношением  $\beta = c + 1/\sqrt[n]{a}$ . Графики функции (10) при  $b = 1/\sqrt{2}$ ,  $c = 1$  для  $a = 0.1$  и  $a = 1$  представлены на рис. 2, *a* и *б* соответственно. Функция  $h_n(\omega_H)$  имеет на  $[0, \beta)$  два излома: при  $\omega_H = \sqrt[n]{b}$  и  $\omega_H = c$ .

Аппроксимируем полиномом  $Q_{2n}(\omega_H)$  функцию  $s_n^2(\omega_H) = 1/h_n^2(\omega_H)$ . При выбранных значениях параметров  $a$  и  $c$  коэффициенты полинома  $q_{2i}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , параметр

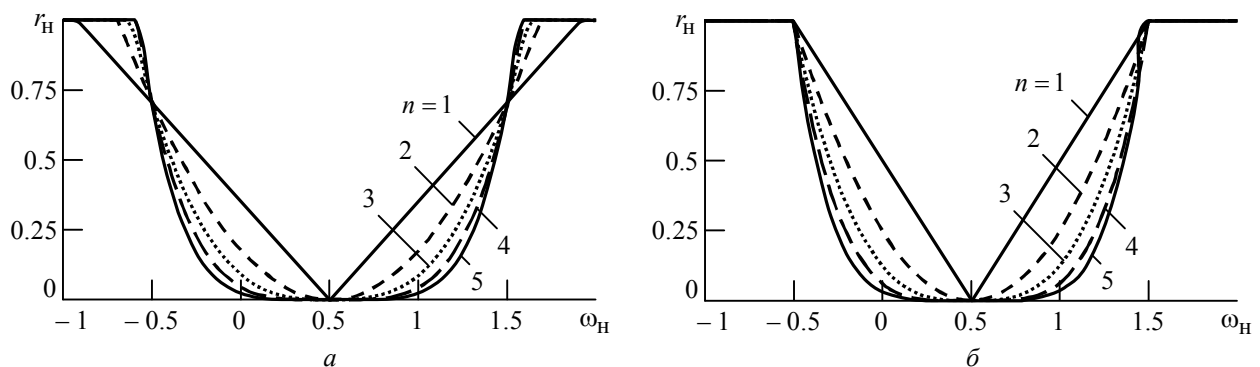


Рис. 1

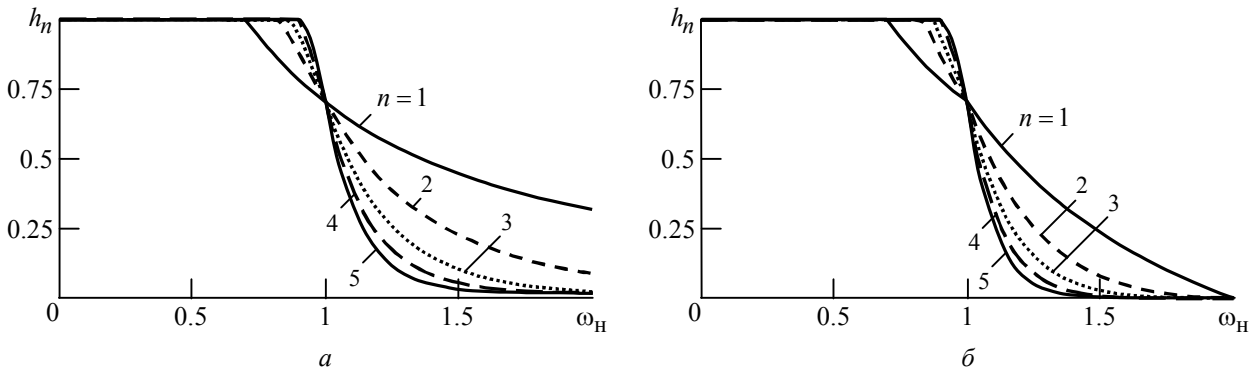


Рис. 2

$b$  и интервал аппроксимации  $l$  определяются из системы  $n+1$  уравнений (3) после подстановки в правую часть системы вместо  $f_n^2(\omega_H)$  функции

$$s_n^2(\omega_H) = \begin{cases} 1, & \omega_H \leq \sqrt[n]{b}; \\ \omega_H^{2n}/b^2, & \sqrt[n]{b} \leq \omega_H \leq c; \\ \omega_H^{2n}/[b^2 a^2 (\beta - \omega_H)^{2n}], & c \leq \omega_H < \beta. \end{cases} \quad (11)$$

При интегрировании выполняется условие  $\sqrt[n]{b} < c < l$ . Полученные интегралы табличные [3].

Подставив пределы интегрирования  $\sqrt[n]{b}$ ,  $c$  и  $l$ , после приведения подобных членов найдем:

$$\int_0^l \omega_H^{2k} s_n^2(\omega_H) d\omega_H = \frac{2n}{(2n+2k+1)(2k+1)} \sqrt[n]{b}^{2k+1} \left( 1 + \frac{2k+1}{2n} \frac{c^{2n+2k+1}}{\sqrt[n]{b}^{2n+2k+1}} \right) + \frac{1}{b^2 a^2} \left\{ \sum_{p=0}^{2n+2k} \frac{(2n+2k)! (-\beta)^p}{(2n+2k-p)! p! (2k-p+1)!} [(\beta-c)^{2k-p+1} - (\beta-l)^{2k-p+1}] \right\}, \quad (12)$$

за исключением  $2k-p+1=0$ . В последнем случае соответствующий член суммы должен быть заменен на  $\frac{(2n+2k)! (-\beta)^{2k+1}}{(2n-1)! (2k+1)!} \ln \frac{\beta-c}{\beta-l}$ .

В частном случае при  $c=l$  значения интегралов (5) и (12) совпадают. Положим  $c=l_g$ , где  $l_g$  – интервал аппроксимации, соответствующий первой производной  $g$  при решении исходной системы уравнений. Тогда решения систем уравнений (3) при использовании в качестве аппроксимирующих функций  $f_n^2(\omega_H)$  и  $s_n^2(\omega_H)$  совпадают независимо от значения параметра  $a$ . Примем  $a=1$ , поскольку из графиков на рис. 2 видно, что при этом значении функция  $h_n(\omega_H)$  имеет после точки  $\omega_H=c$  наибольшую крутизну. В табл. 2 приведены выражения  $H_n^2(\omega_H)$ ,  $n=1, \dots, 5$ , для значений  $g$ , превышающих (за исключением первых строк для каждого  $n$ ) значения производных из табл. 1.



Таблица 2

$n = 1, a = 1, c = 1.040298$			
$g$	$b$	$l$	$H_1^2(\omega_H)$
2.35	0.661198	1.040298	$(0.825 + 1.175\omega_H^2)^{-1}$
2.40	0.685265	1.101986	$(0.800 + 1.200\omega_H^2)^{-1}$
2.45	0.708200	1.145436	$(0.775 + 1.225\omega_H^2)^{-1}$
2.50	0.730884	1.182224	$(0.750 + 1.250\omega_H^2)^{-1}$
2.55	0.753628	1.215333	$(0.725 + 1.275\omega_H^2)^{-1}$
$n = 2, a = 1, c = 1.097884$			
$g$	$b/\sqrt{b}$	$l$	$H_2^2(\omega_H)$
6.5	$\frac{0.703126}{0.838526}$	1.097884	$(1.0969 - 1.4438\omega_H^2 + 2.3469\omega_H^4)^{-1}$
7.0	$\frac{0.724652}{0.851265}$	1.149059	$(1.1297 - 1.7594\omega_H^2 + 2.6297\omega_H^4)^{-1}$
7.5	$\frac{0.741604}{0.861165}$	1.177602	$(1.1639 - 2.0779\omega_H^2 + 2.9139\omega_H^4)^{-1}$
8.0	$\frac{0.755464}{0.869175}$	1.200575	$(1.1993 - 2.3986\omega_H^2 + 3.1993\omega_H^4)^{-1}$
$n = 3, a = 1, c = 1.092139$			
$g$	$b/\sqrt[3]{b}$	$l$	$H_3^2(\omega_H)$
11.5	$\frac{0.700191}{0.887985}$	1.092139	$(0.9551 + 1.3133\omega_H^2 - 5.2418\omega_H^4 + 4.9734\omega_H^6)^{-1}$
12.0	$\frac{0.705203}{0.890099}$	1.093690	$(0.9445 + 1.5459\omega_H^2 - 5.9253\omega_H^4 + 5.4349\omega_H^6)^{-1}$
14.0	$\frac{0.724726}{0.898238}$	1.100940	$(0.9014 + 2.4881\omega_H^2 - 8.6805\omega_H^4 + 7.2910\omega_H^6)^{-1}$
16.0	$\frac{0.742175}{0.905389}$	1.110281	$(0.8568 + 3.4527\omega_H^2 - 11.4758\omega_H^4 + 9.1663\omega_H^6)^{-1}$
18.0	$\frac{0.755516}{0.910782}$	1.122407	$(0.8102 + 4.4455\omega_H^2 - 14.3216\omega_H^4 + 11.0659\omega_H^6)^{-1}$
$n = 4, a = 1, c = 1.040471$			
$g$	$b/\sqrt[4]{b}$	$l$	$H_4^2(\omega_H)$
17	$\frac{0.698724}{0.914274}$	1.040471	$(1.0210 - 1.0200\omega_H^2 + 7.3164\omega_H^4 - 16.1568\omega_H^6 + 10.8394\omega_H^8)^{-1}$
20	$\frac{0.724116}{0.922470}$	1.044426	$(1.0449 - 1.9704\omega_H^2 + 12.8512\omega_H^4 - 25.9709\omega_H^6 + 16.0452\omega_H^8)^{-1}$
24	$\frac{0.758485}{0.933226}$	1.052281	$(1.0786 - 3.2949\omega_H^2 + 20.4924\omega_H^4 - 39.4146\omega_H^6 + 23.1385\omega_H^8)^{-1}$
28	$\frac{0.786371}{0.941688}$	1.065975	$(1.1157 - 4.7237\omega_H^2 + 28.5997\omega_H^4 - 53.4911\omega_H^6 + 30.4994\omega_H^8)^{-1}$
32	$\frac{0.791615}{0.943254}$	1.136643	$(1.1595 - 6.3606\omega_H^2 + 37.6368\omega_H^4 - 68.8298\omega_H^6 + 38.3941\omega_H^8)^{-1}$

$n = 5, a = 1, c = 0.999052$			
$g$	$b/\sqrt[5]{b}$	$l$	$H_5^2(\omega_H)$
24	$\frac{0.707765}{0.933207}$	0.999052	$(0.9865 + 0.9483\omega_H^2 - 10.2403\omega_H^4 + 37.6407\omega_H^6 - 55.2862\omega_H^8 + 27.9510\omega_H^{10})^{-1}$
26	$\frac{0.725079}{0.937728}$	1.018634	$(0.9799 + 1.3592\omega_H^2 - 14.1571\omega_H^4 + 50.2534\omega_H^6 - 71.3718\omega_H^8 + 34.9364\omega_H^{10})^{-1}$
34	$\frac{0.748185}{0.943630}$	1.070933	$(0.9412 + 3.6477\omega_H^2 - 34.9637\omega_H^4 + 114.4880\omega_H^6 - 150.3820\omega_H^8 + 68.2687\omega_H^{10})^{-1}$
42	$\frac{0.696954}{0.930338}$	1.124774	$(0.8421 + 8.9786\omega_H^2 - 79.2715\omega_H^4 + 240.3093\omega_H^6 - 293.9292\omega_H^8 + 125.0707\omega_H^{10})^{-1}$
50	$\frac{0.584262}{0.898093}$	1.166030	$(0.4486 + 28.7559\omega_H^2 - 232.8165\omega_H^4 + 648.0205\omega_H^6 - 729.8585\omega_H^8 + 287.4499\omega_H^{10})^{-1}$

Коэффициенты полиномов определены в результате решения системы уравнений (3), где в качестве аппроксимируемой использовалась функция  $s_n^2(\omega_H)$ . В первых строках табл. 2 для каждого  $n = 1, \dots, 5$  значения  $g$  выбраны равными предельным значениям производных для фильтров тех же порядков, приведенных в табл. 1. Из сравнения таблиц

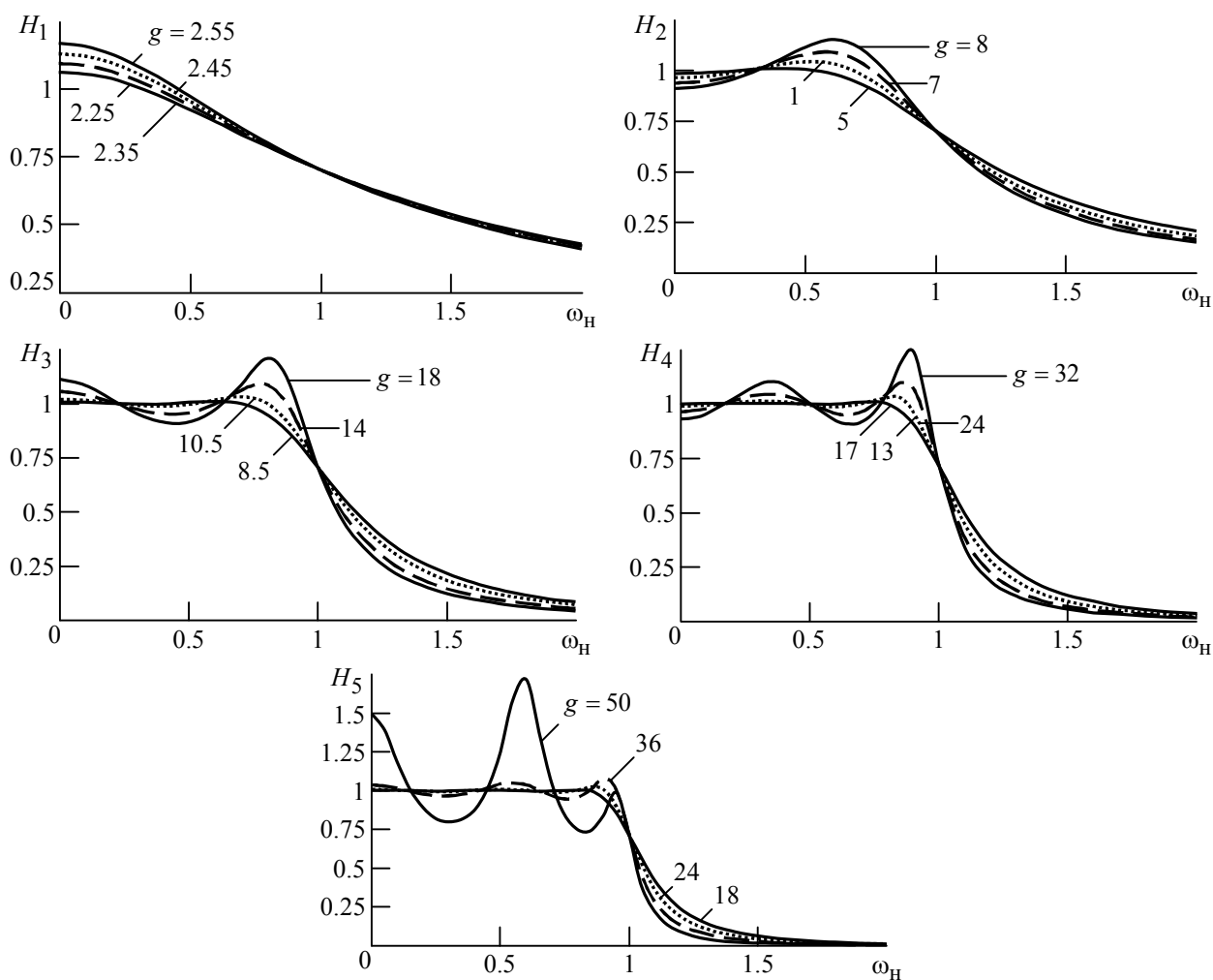


Рис. 3

видно, что при равных  $g$  коэффициенты  $q_{2i}$  при членах полиномов, имеющих одинаковую степень, параметры  $b$  и соответствующие им интервалы аппроксимации  $l$  совпадают.

Графики  $H_n(\omega_H)$  для выборочных значений  $g$  из табл. 1 и 2 представлены на рис. 3. Из графиков видно, что при любом  $n$  с ростом крутизны АЧХ в переходной области, определяющей затухание фильтра в полосе задерживания, колебания  $H_n(\omega_H)$  относительно единичного значения в полосе пропускания нарастают. Изменяя число  $c$ , которое при решении системы уравнений (3) играет роль параметра, можно добиться уменьшения максимального отклонения  $H_n(\omega_H)$  от единицы и выравнивания его с одним из лепестков АЧХ. В качестве примера в табл. 3 представлены значения  $a$  и  $c$  для максимальных величин  $g$ , приведенных в табл. 2, а также расчетные значения  $b$ ,  $l$  и коэффициентов полинома  $Q_{2n}(\omega_H)$ ,  $n = 2, \dots, 5$ , при которых два лепестка АЧХ  $\hat{H}_n(\omega_H)$  выровнены с точностью до третьего знака после запятой. Для  $n=1$  число  $c$  произвольно выбрано равным единице. Соответствующие графики АЧХ  $\hat{H}_n(\omega_H)$  представлены на рис. 4.

Выравнивание всех лепестков АЧХ в полосе пропускания может быть достигнуто при переходе к другому критерию вычисления коэффициентов полинома аппроксимирующей функции.

**АЧХ равномерного приближения.** Примем в качестве критерия аппроксимации идеальной АЧХ равенство абсолютных отклонений на отрезке  $[0, d]$ ,  $d < 1$ , функции

Таблица 3

$n=1, a=1, c=1$			
$g$	$b$	$l$	$\hat{H}_1^2(\omega_H)$
2.55	0.763134	1.196395	$(0.725 + 1.275\omega_H^2)^{-1}$
$n=2, a=1, c=1.629477$			
$g$	$b/\sqrt{b}$	$l$	$\hat{H}_2^2(\omega_H)$
8	$\frac{0.665851}{0.815997}$	1.715142	$(1.3061 - 2.6122\omega_H^2 + 3.3061\omega_H^4)^{-1}$
$n=3, a=1, c=1.176839$			
$g$	$b/\sqrt[3]{b}$	$l$	$\hat{H}_3^2(\omega_H)$
18	$\frac{0.655951}{0.868875}$	1.202663	$(0.7407 + 5.4128\omega_H^2 - 16.0478\omega_H^4 + 11.8943\omega_H^6)^{-1}$
$n=4, a=1, c=1.094351$			
$g$	$b/\sqrt[4]{b}$	1	$\hat{H}_4^2(\omega_H)$
32	$\frac{0.640749}{0.894689}$	1.133891	$(1.2446 - 8.9676\omega_H^2 + 49.1924\omega_H^4 - 84.4605\omega_H^6 + 44.9911\omega_H^8)^{-1}$
$n=5, a=1, c=0.999052$			
$g$	$b/\sqrt[5]{b}$	$l$	$\hat{H}_5^2(\omega_H)$
50	$\frac{0.782282}{0.952078}$	1.133863	$(0.7725 + 12.7707\omega_H^2 - 111.3222\omega_H^4 + 333.2855\omega_H^6 - 402.5495\omega_H^8 + 169.0430\omega_H^{10})^{-1}$

$\tilde{H}_n(\omega_H) = 1/\sqrt{V_{2n}(\omega_H)}$  от единицы ( $V_{2n}(\omega_H) = \sum_{i=0}^n v_{2i}\omega_H^{2i}$  – полином степени  $2n$ ). Под аб-

солютными отклонениями понимаются значения

$$\Delta_j = \left| 1 - 1/\sqrt{V_{2n}(\omega_{Hj})} \right|_{0 \leq \omega_{Hj} < d}$$

$j = 1, \dots, n$ , где  $\omega_{Hj}$  – корни полинома  $V'_{2n}(\omega_H) = \omega_H \sum_{i=1}^n 2iv_{2i}\omega_H^{2(i-1)}$ , полученного диффе-

ренцированием полинома  $V_{2n}(\omega_H)$ . Если при определенных условиях, наложенных на ко-  
эффициенты полинома  $V_{2n}(\omega_H)$ , функция  $\tilde{H}_n(\omega_H)$  существует, то она равномерно при-  
ближает идеальную АЧХ в полосе пропускания с точностью до  $\Delta_j$ . Из уравнения

$V'_{2n}(\omega_H) = 0$  следует, что  $\omega_{H1} = 0$  является корнем полинома. Таким образом, всего на от-  
резке  $[0, d]$  существует  $n + 1$  точек (включая границы отрезка 0 и  $d$ ) таких, что разность

$\Delta_j = \left| 1 - 1/\sqrt{V_{2n}(0)} \right|$ . Для определения коэффициентов полинома  $V_{2n}(\omega_H)$  с учетом условий  $V_{2n}(1) = 2$  и  $V'_{2n}(1) = g$ , а также границы отрезка  $d$ , составим систему  $n + 2$  уравнений:

$$\begin{cases} \left| 1 - 1/\sqrt{V_{2n}(0)} \right| = \left| 1 - 1/\sqrt{V_{2n}(\omega_{Hj})} \right|, j = 2, \dots, n; \\ \left| 1 - 1/\sqrt{V_{2n}(0)} \right| = \left| 1 - 1/\sqrt{V_{2n}(\omega_H)} \right|, \omega_H \approx 1; \\ \sum_{i=0}^n v_{2i} = 2; \\ \sum_{i=1}^n 2iv_{2i} = g. \end{cases} \quad (13)$$

Решением системы (13) являются  $n + 1$  коэффициент полинома  $v_{2i}, i = 0, \dots, n$ , и гра-  
ница  $\omega_{Hd}$  отрезка равномерного приближения  $d$ . Решение может быть найдено с любой  
точностью для  $n = 1, \dots, 5$ , поскольку в этом случае положительные корни  $\omega_{Hj}$ ,

$j = 2, \dots, 5$ , биквадратного уравнения  $\sum_{i=1}^n 2iv_{2i}\omega_H^{2(i-1)} = 0$  выражаются через коэффициенты

$v_{2i}, i = 1, \dots, n$ , в общем виде (табл. 4). В табл. 5 представлены функции  $\tilde{H}_n^2(\omega_H)$ ,  
 $n = 1, \dots, 5$  и отрезки  $d$ .

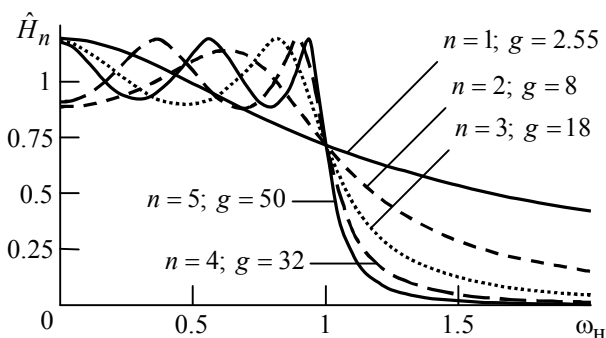


Рис. 4

Графики АЧХ равномерного прибли-  
жения  $\tilde{H}_n(\omega_H)$  для минимального и мак-  
симального значений  $g$  из табл. 5  
приведены на рис. 5. Там же для сравнения  
приведены АЧХ фильтров Чебышева  
 $H_{nЧ}(\omega_H) = 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_H)}$  ( $T_n(\omega_H)$  – по-  
лином Чебышева  $n$ -го порядка,  $0 < \varepsilon \leq 1$  –

Таблица 4

$n$	$\omega_{Hj}$
2	$\omega_{H2} = \sqrt{-v_2/(2v_4)}$
3	$\omega_{H2,3} = \sqrt{\frac{-v_4 \mp \sqrt{v_4^2 - 3v_2v_6}}{3v_6}}$
4	$\omega_{H2,3} = \sqrt{-2 \sqrt{\frac{3v_6^2 - 8v_4v_8}{48v_8^2}} \cos \left\{ \frac{\pi}{3} \mp \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{v_6^3 - 4v_4v_6v_8 + 8v_2v_8^2}{-\sqrt{\left(\frac{3v_6^2 - 8v_4v_8}{3}\right)^3}} \right] \right\}} - \frac{v_6}{4v_8};$ $\omega_{H4} = \sqrt{2 \sqrt{\frac{3v_6^2 - 8v_4v_8}{48v_8^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{v_6^3 - 4v_4v_6v_8 + 8v_2v_8^2}{-\sqrt{\left(\frac{3v_6^2 - 8v_4v_8}{3}\right)^3}} \right] \right\}} - \frac{v_6}{4v_8}.$
5	$\omega_{H2,3} = \sqrt{-\left(\frac{v_8}{5v_{10}} + \sqrt{\frac{Y}{2} + \frac{v_8^2}{25v_{10}^2} - \frac{3v_6}{20v_{10}}}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{v_8}{5v_{10}} + \sqrt{\frac{Y}{2} + \frac{v_8^2}{25v_{10}^2} - \frac{3v_6}{20v_{10}}}\right)^2 - Y - \frac{2Yv_8 - v_4}{\sqrt{50Yv_{10}^2 + 4v_8^2 - 15v_6v_{10}}}}};$ $\omega_{H4,5} = \sqrt{-\left(\frac{v_8}{5v_{10}} + \sqrt{\frac{Y}{2} + \frac{v_8^2}{25v_{10}^2} - \frac{3v_6}{20v_{10}}}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{v_8}{5v_{10}} + \sqrt{\frac{Y}{2} + \frac{v_8^2}{25v_{10}^2} - \frac{3v_6}{20v_{10}}}\right)^2 - Y + \frac{2Yv_8 - v_4}{\sqrt{50Yv_{10}^2 + 4v_8^2 - 15v_6v_{10}}}}};$ <p>где <math>Y = 2 \sqrt{\frac{3v_6^2 - 8v_4v_8 + 20v_2v_{10}}{300v_{10}^2}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{v_6^3 - 4v_4v_6v_8 - 20v_2v_6v_{10} + 8v_2v_8^2 + 10v_4^2v_{10}}{\sqrt{\left(\frac{3v_6^2 - 8v_4v_8 + 20v_2v_{10}}{3}\right)^3}} \right] \right\} + \frac{v_6}{10v_{10}}.</math></p>

коэффициент неравномерности) при двух значениях  $\epsilon$  для  $n \geq 2$ . Максимальные значения  $g$  в  $\tilde{H}_n(\omega_H)$  приняты равными значениям первой производной подкоренного выражения  $H_{nч}(\omega_H)$  в точке  $\omega_H = 1$  при  $\epsilon = 1$ :  $2T'_n(1) = g$ . При равных  $g$  равны и значения крутизны сравниваемых АЧХ на границе полосы пропускания:  $\tilde{H}'_n(1) = H'_{nч}(1) = -(1/2\sqrt{8})g$ .

При  $\epsilon < 1$  полоса пропускания фильтров Чебышева расширяется в отличие от синтезированных фильтров, и в этом случае целесообразно сравнивать фильтры с одинаковой неравномерностью  $\delta_n = 20 \lg(H_{n\max}/H_{n\min})$  ( $H_{n\max}$  и  $H_{n\min}$  – максимальное и минимальное значение АЧХ соответственно, имеющей колебательный характер в полосе пропускания). Из графиков рис. 5 видно, что при одинаковых значениях  $\delta_n$  затухание синтезированного фильтра в полосе задерживания превосходит соответствующую характеристику фильтра Чебышева.

На рис. 6 представлены зависимости затухания от частоты в полосе задерживания синтезированных ФНЧ  $\tilde{\alpha}_n(\omega_H) = -20 \lg \tilde{H}_n(\omega_H)$  и фильтров Чебышева  $\alpha_{nч}(\omega_H) = -20 \lg H_{nч}(\omega_H)$  при  $g = 2.55$  и  $g = 2$  для  $n = 1$  и при равных значениях  $g$  для  $n \geq 2$ .

Таблица 5

$n$	$g$	$d$	$\tilde{H}_n^2(\omega_H)$
1	2.40	0.636116	$(0.800 + 1.200\omega_H^2)^{-1}$
	2.45	0.678747	$(0.775 + 1.225\omega_H^2)^{-1}$
	2.50	0.720843	$(0.750 + 1.250\omega_H^2)^{-1}$
	2.55	0.762990	$(0.725 + 1.275\omega_H^2)^{-1}$
2	6.5	0.796747	$(1.1306 - 1.5112\omega_H^2 + 2.3806\omega_H^4)^{-1}$
	7.0	0.833357	$(1.1809 - 1.8619\omega_H^2 + 2.6809\omega_H^4)^{-1}$
	7.5	0.863422	$(1.2392 - 2.2285\omega_H^2 + 2.9892\omega_H^4)^{-1}$
	8.0	0.888889	$(1.3061 - 2.6122\omega_H^2 + 3.3061\omega_H^4)^{-1}$
3	12	0.868089	$(0.9285 + 1.8103\omega_H^2 - 6.4062\omega_H^4 + 5.6673\omega_H^6)^{-1}$
	14	0.908079	$(0.8785 + 2.9465\omega_H^2 - 9.5287\omega_H^4 + 7.7036\omega_H^6)^{-1}$
	16	0.934903	$(0.8246 + 4.2568\omega_H^2 - 12.9874\omega_H^4 + 9.9060\omega_H^6)^{-1}$
	18	0.954594	$(0.7701 + 5.7324\omega_H^2 - 16.7752\omega_H^4 + 12.2727\omega_H^6)^{-1}$
4	20	0.917541	$(1.0722 - 2.6105\omega_H^2 + 15.5037\omega_H^4 - 29.4649\omega_H^6 + 17.4994\omega_H^8)^{-1}$
	24	0.945310	$(1.1438 - 4.6917\omega_H^2 + 26.2511\omega_H^4 - 47.0023\omega_H^6 + 26.2991\omega_H^8)^{-1}$
	28	0.962831	$(1.2406 - 7.2038\omega_H^2 + 38.8537\omega_H^4 - 67.0583\omega_H^6 + 36.1678\omega_H^8)^{-1}$
	32	0.975168	$(1.3651 - 10.1151\omega_H^2 + 53.1837\omega_H^4 - 89.4828\omega_H^6 + 47.0490\omega_H^8)^{-1}$
5	26	0.923320	$(0.9660 + 2.0457\omega_H^2 - 19.1964\omega_H^4 + 63.0482\omega_H^6 - 84.5201\omega_H^8 + 39.6566\omega_H^{10})^{-1}$
	34	0.956882	$(0.9079 + 5.4332\omega_H^2 - 47.4710\omega_H^4 + 145.1675\omega_H^6 - 181.1942\omega_H^8 + 79.1566\omega_H^{10})^{-1}$
	42	0.973842	$(0.8359 + 10.0611\omega_H^2 - 84.8710\omega_H^4 + 250.5767\omega_H^6 - 301.9643\omega_H^8 + 127.3616\omega_H^{10})^{-1}$
	50	0.984310	$(0.7612 + 15.7532\omega_H^2 - 130.0755\omega_H^4 + 375.9149\omega_H^6 - 443.4221\omega_H^8 + 183.0683\omega_H^{10})^{-1}$

В табл. 6 представлены передаточные функции  $\tilde{H}_n(s_H)$ ,  $H_n\text{ч}(s_H)^4$  и полюсы  $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , передаточных функций синтезированных фильтров и фильтров Чебышева ( $p_H = \sigma_H + j\omega_H$  – нормированная комплексная частота;  $\sigma_H$  и  $s_H = j\omega_H$  – вещественная и мнимая части нормированной комплексной частоты соответственно), а также их АЧХ  $H_n(\omega_H) = |H_n(s_H)|$  и фазочастотные характеристики (ФЧХ)  $\arg[H_n(s_H)]$  в

<sup>4</sup> В табл. 6 и далее знак тильды в обозначении  $\tilde{H}_n(s_H)$  и индекс "ч" в обозначении  $H_n\text{ч}(s_H)$  опущены.

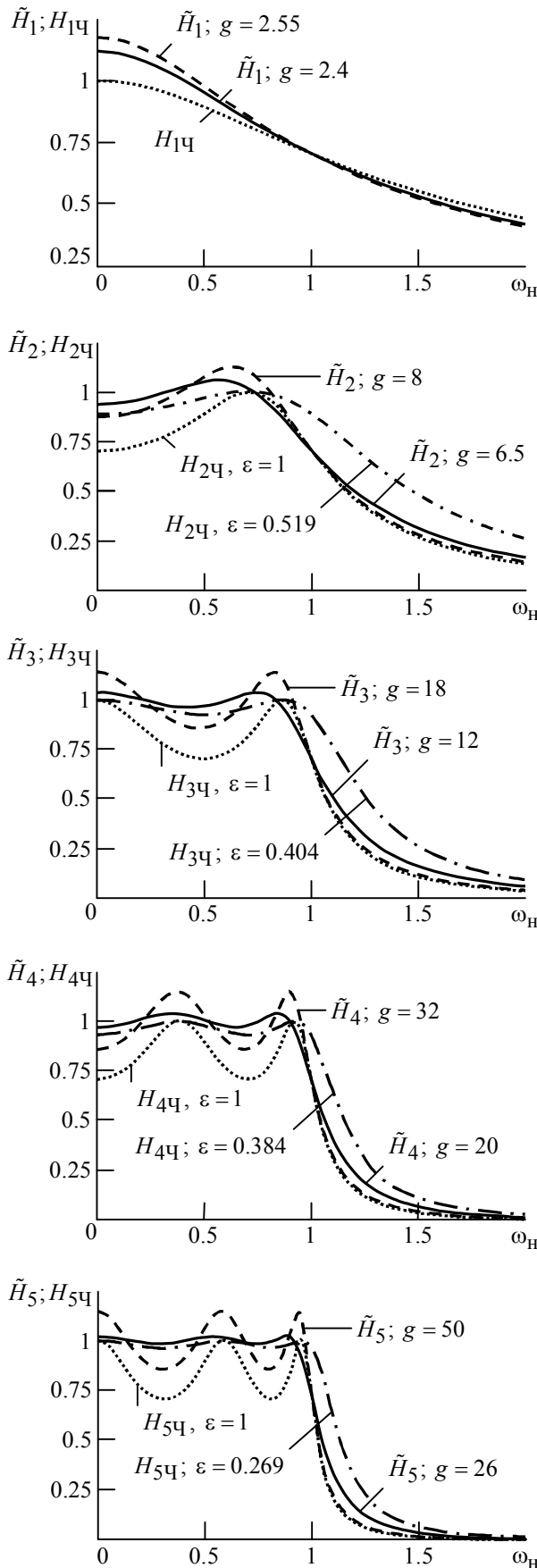


Рис. 5

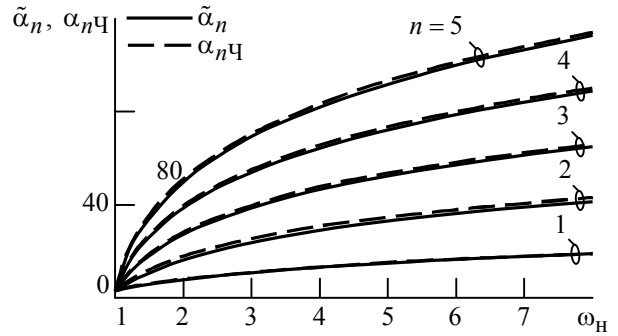


Рис. 6

невной форме.  $H_n(s_H)$  и  $H_n(\omega_H)$  представлены в виде произведений, соответственно, передаточных функций и АЧХ звеньев первого и второго порядков с общим коэффициентом  $K$  в числителе и коэффициентами  $A, B, C, F, G$  в знаменателе. Там же приведены неравномерности АЧХ  $\delta_n$  и максимальные превышения затухания фильтров Чебышева в полосе задерживания  $\Delta_m$  при  $\omega_H = 8$  (см. рис. 6). На рис. 7 совмещены графики  $\varphi_n(\omega_H)$  синтезированных ФНЧ и фильтров Чебышева.

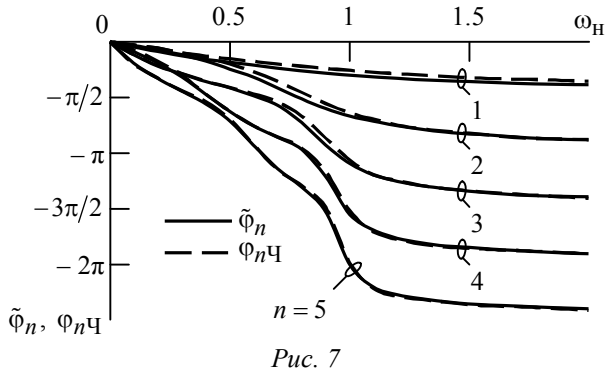
При равномерном приближении на отрезке идеальной АЧХ ( $n \leq 5$ ) имеет место "равноволновое" отклонение АЧХ от еди ницы в полосе пропускания. При одинаковой крутизне  $H'_n(1) = -(1/2\sqrt{8})g$  на границе полосы пропускания неравномерность  $\delta$  синтезированной АЧХ снижается и, соответственно, несколько спрямляется ФЧХ по сравнению с характеристикой фильтра Чебышева. Превышение затухания фильтров Чебышева в полосе задерживания увеличивается с ростом  $n$  и при  $n = 5$   $\Delta_m$  составляет 1.451 дБ на частоте  $\omega_H = 8$  при абсолютном ослаблении синтезированной АЧХ на этой частоте 112.76 дБ.

$n = 1$		
$H_1(s_H)$		$H_1(\omega_H)$
$\frac{K}{s_H + A}$		$\frac{K}{\sqrt{\omega_H^2 + A^2}}$
ФНЧ	$g$	$p_i$
Синтезированный	2.55	$p_1 = -0.754074$
Чебышева	2	$p_{Ч1} = -1$
$n = 2$ ;		
$H_2(s_H)$		$H_2(\omega_H)$
$\frac{K}{s_H^2 + Bs_H + C}$		$\frac{K}{\sqrt{(\omega_H^2 - C)^2 + (B\omega_H)^2}}$
ФНЧ	$p_i$	
Синтезированный	$p_{1,2} = -0.341671 \pm j0.715402$	
Чебышева	$p_{Ч1,2} = -0.321797 \pm j0.776887$	
$n = 3$ ;		
$H_3(s_H)$		$H_3(\omega_H)$
$\frac{K}{(s_H + A)(s_H^2 + Bs_H + C)}$		$\frac{K}{\sqrt{(\omega_H^2 + A^2)[(\omega_H^2 - C)^2 + (B\omega_H)^2]}}$
ФНЧ	$p_i$	
Синтезированный	$p_1 = -0.319025; p_{2,3} = -0.159513 \pm j0.871648$	
Чебышева	$p_{Ч1} = -0.298036; p_{Ч2,3} = -0.149018 \pm j0.903670$	
$n = 4$ ;		
$H_4(s_H)$		$H_4(\omega_H)$
$\frac{K}{(s_H^2 + Bs_H + C)(s_H^2 + Fs_H + G)}$		$\frac{K}{\sqrt{[(\omega_H^2 - C)^2 + (B\omega_H)^2][(\omega_H^2 - G)^2 + (F\omega_H)^2]}}$
ФНЧ	$p_i$	
Синтезированный	$p_{1,2} = -0.220292 \pm j0.384175; p_{3,4} = -0.091248 \pm j0.927479$	
Чебышева	$p_{Ч1,2} = -0.205222 \pm j0.392011; p_{Ч3,4} = -0.085006 \pm j0.946398$	
$n = 5$ ;		
$H_5(s_H)$		$H_5(\omega_H)$
$\frac{K}{(s_H + A)(s_H^2 + Bs_H + C)(s_H^2 + Fs_H + G)}$		$\frac{K}{\sqrt{(\omega_H^2 + A^2)[(\omega_H^2 - C)^2 + (B\omega_H)^2][(\omega_H^2 - G)^2 + (F\omega_H)^2]}}$
ФНЧ	$p_i$	
Синтезированный	$p_1 = -0.190447;$ $p_{2,3} = -0.058851 \pm j0.953496; p_{4,5} = -0.154075 \pm j0.589293$	
Чебышева	$p_{Ч1} = -0.177189;$ $p_{Ч2,3} = -0.054754 \pm j0.965871; p_{Ч4,5} = -0.143349 \pm j0.596941$	



Таблица 6

$\operatorname{tg}[\varphi_1(\omega_H)]$										
$-\frac{\omega_H}{A}$										
$K$				$A$						
0.885615				0.754074						
1				1						
$g = 8$										
$\operatorname{tg}[\varphi_2(\omega_H)]$										
$\frac{B\omega_H}{\omega_H^2 - C}$										
$K$		$B$		$C$		$\delta_2$	$\Delta_m$			
0.549972		0.683341		0.628539		2.183	0.813			
0.5		0.643594		0.707107		3.010	-			
$g = 18$										
$\operatorname{tg}[\varphi_3(\omega_H)]$										
$\frac{\omega_H^3 - (AB + C)\omega_H}{(A + B)\omega_H^2 - AC}$										
$K$		$A$		$B$		$C$	$\delta_3$	$\Delta_m$		
0.285450		0.319025		0.319025		0.785214	2.439	1.143		
0.25		0.298036		0.298036		0.838825	3.010	-		
$g = 32$										
$\operatorname{tg}[\varphi_4(\omega_H)]$										
$\frac{(B + F)\omega_H^3 - (BG + CF)\omega_H}{\omega_H^4 - (C + BF + G)\omega_H^2 + CG}$										
$K$		$B$		$C$		$F$	$G$	$\delta_4$	$\Delta_m$	
0.145789		0.440584		0.196119		0.182496	0.868544	2.521	1.330	
0.125		0.410444		0.195789		0.170011	0.902895	3.010	-	
$g = 50$										
$\operatorname{tg}[\varphi_5(\omega_H)]$										
$\frac{\omega_H^5 - [A(B + F) + BF + C + G]\omega_H^3 + [A(BG + CF) + CG]\omega_H}{(A + B + F)\omega_H^4 - [A(C + BF + G) + BG + CF]\omega_H^2 + ACG}$										
$K$		$A$		$B$		$C$	$F$	$G$	$\delta_5$	$\Delta_m$
0.073908		0.190447		0.117702		0.912618	0.308149	0.371005	2.558	1.451
0.0625		0.177189		0.109509		0.935904	0.286698	0.376887	3.010	-



В общем случае (при любом  $n$ ), используя функцию (11) в качестве аппроксимируемой, можно, не разделяя фильтры по типу передаточной функции, синтезировать АЧХ в диапазоне от "максимально плоских" кривых Баттерворта до характеристик, имеющих колебательный характер в полосе пропускания и крутизну, близкую (при равных  $g$ ) к крутизне АЧХ фильтров

Чебышева в переходной области или (при равных  $\delta$ ) превышающую ее.

**Примеры.** На рис. 8, а, б приведены схемы четырехполюсников, реализующих звенья первого и второго порядков при каскадном построении ФНЧ.

Передаточная функция низкочастотной цепи первого порядка (рис. 8, а)

$$H_{1\text{НФ}}(s_H) = \frac{K_{\text{п}}/(\omega_c r C_{1\text{НФ}})}{s_H + 1/(\omega_c r C_{1\text{НФ}})}, \quad (14)$$

где  $K_{\text{п}}$  – коэффициент передачи элемента развязки;  $r$  и  $C_{1\text{НФ}}$  – сопротивление и емкость низкочастотной цепи соответственно. Для фильтра первого порядка, сравнив выражения (14) и  $\tilde{H}_1(s_H)$  (см. табл. 6), находим, что в (14)  $1/(\omega_c r C_{1\text{НФ}}) = A$ ;  $K_{\text{п}}/(\omega_c r C_{1\text{НФ}}) = K$ .

Из полученных соотношений могут быть определены элементы четырехполюсника и  $K_{\text{п}}$ . Задав  $\omega_c$  и номинал одного элемента, например  $C_{1\text{НФ}}$ , найдем:  $r = 1/(A\omega_c C_{1\text{НФ}})$ ,  $K_{\text{п}} = K\omega_c r C_{1\text{НФ}}$ . Положим  $\omega_c = 1 \cdot 10^5$  рад/с,  $C_{1\text{НФ}} = 1 \cdot 10^{-7}$  Ф. Для синтезированного фильтра при  $g = 2.55$  имеем  $r \approx 132.6$  Ом, коэффициент передачи  $K_{\text{п}} = 1.174$ . Для фильтра Чебышева ( $g = 2$ )  $r = 100$  Ом,  $K_{\text{п}} = 1$ .

Передаточная функция низкочастотной цепи второго порядка (рис. 8, б)

$$H_{2\text{НФ}}(s_H) = K_{\text{п}} \frac{R/(1 + s_H \omega_c R C_{2\text{НФ}})}{s_H \omega_c L_{2\text{НФ}} + R/(1 + s_H \omega_c R C_{2\text{НФ}})} = K_{\text{п}} \frac{(\omega_p/\omega_c)^2}{s_H^2 + [\omega_p/(\omega_c Q)]s_H + (\omega_p/\omega_c)^2}, \quad (15)$$

где  $R$ ,  $C_{2\text{НФ}}$ ,  $L_{2\text{НФ}}$  – сопротивление, емкость и индуктивность низкочастотной цепи второго порядка соответственно;  $\omega_p = 1/\sqrt{L_{2\text{НФ}}C_{2\text{НФ}}}$  и  $Q = R/\sqrt{L_{2\text{НФ}}/C_{2\text{НФ}}}$  – резонансная частота и добротность контура, шунтированного сопротивлением  $R$ , соответственно.

Сравнив выражение (15) с передаточной функцией  $\tilde{H}_2(s_H)$  (см. табл. 6), найдем, что

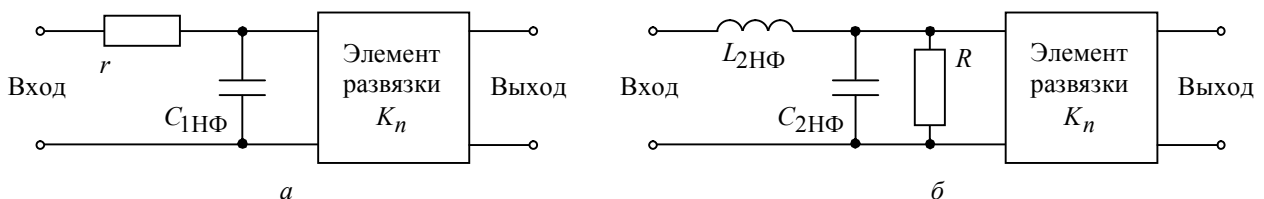


Рис. 8

в (15)  $\omega_p = \sqrt{C}\omega_c$ ,  $Q = \sqrt{C}/B$ ,  $K_{\Pi}\omega_p^2/\omega_c^2 = K_{\Pi}C = K$ , откуда  $L_{2\text{НФ}} = 1/(C\omega_c^2 C_{2\text{НФ}})$ ,  $R = 1/(B\omega_c C_{2\text{НФ}})$ ,  $K_{\Pi} = K/C$ . При  $\omega_c = 1 \cdot 10^5$  рад/с,  $C_{2\text{НФ}} = 1 \cdot 10^{-7}$  Ф для синтезированного фильтра второго порядка ( $g = 8$ )  $R \approx 146.3$  Ом,  $L_{2\text{НФ}} \approx 1.591 \cdot 10^{-3}$  Гн,  $K_{\Pi} \approx 0.875$ . Резонансная частота и добротность контура  $\omega_p = 0.79280 \cdot 10^5$  рад/с,  $Q = 1.160$ . Для фильтра Чебышева второго порядка ( $g = 8$ ) найдем:  $R \approx 155.4$  Ом,  $L_{2\text{НФ}} \approx 1.414 \cdot 10^{-3}$  Гн,  $K_{\Pi} \approx 0.707$ ,  $\omega_p = 0.84090 \cdot 10^5$  рад/с,  $Q = 1.307$ .

Увеличение вещественных и уменьшение мнимых составляющих полюсов передаточных функций синтезированных фильтров по сравнению с фильтрами Чебышева (см. табл. 6), а также уменьшение добротности цепи второго порядка в рассмотренном примере указывают на то, что уменьшение неравномерности частотных характеристик реализуется колебательными системами с бóльшим затуханием.

### Библиографический список

1. Червинский Е. Н. Об одном способе аппроксимации прямоугольной функции // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2007. Вып. 3. С. 34–42.
2. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967. 368 с.
3. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.

*E. N. Chervinsky*

*Closed joint-stock company "SIMETA" (Saint-Petersburg)*

#### Frequency characteristics correction during low-pass filters synthesis

*Method of low-pass filter response characteristics synthesis with given unevenness by fixed pass band and maintain of filter order is suggested. The concept of rejection function is introduced, the approximated function is determined. The minimum deviation of inverse square module filter transfer function from approximated function on approximation interval and even approximation criterion on the length of ideal response characteristic are used as an optimum criterion of realizable filters characteristics. The comparison of synthesizing amplitude-frequency- and phase-response characteristics is fulfilled. Examples of realization of first- and second-orders with cascade construction of filters are presented.*

Approximation interval, response characteristic steepness, rejection function, approximated function, response characteristic of even approximation

Статья поступила в редакцию

УДК 621.37

**М. И. Богачев**

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет "ЛЭТИ"

## Сравнительная оценка информативности кратковременной и долговременной зависимостей трафика при прогнозировании его динамики в телекоммуникационных системах

*Проведено сравнение двух алгоритмов прогнозирования превышения трафиком в телекоммуникационных системах фиксированных порогов. Первый алгоритм основан на анализе кратковременных предикторов такого превышения, второй – базируется на долговременной зависимости и использует аппарат интервальных статистик. Для обучения первого алгоритма использованы фрактальные модели и модели на основе очередей с приоритетами, отражающие динамику совместного поведения пользователей при обращении к одиночному серверу. Установлены потенциальные преимущества первого алгоритма. Выводы подтверждены результатами статистического моделирования и анализа исходящего трафика различных HTTP-серверов.*

**ние, кратковременная зависимость, долговременная зависимость, телекоммуникационные системы, фрактальные модели, модели на основе очередей**

В больших телекоммуникационных системах (ТКС), относящихся к системам массового обслуживания, важной задачей является эффективное распределение ресурсов, в частности за счет применения алгоритмов маршрутизации информационных потоков. В известных алгоритмах используемая для выбора оптимального маршрута в больших сетях информация в основном ограничивается оценкой времени от формирования запроса до получения ответа на него на основании текущей загрузки узлов и каналов. Повысить оперативность алгоритмов маршрутизации можно за счет использования информации не только о текущей загрузке различных узлов и каналов, но и о прогнозируемой в кратковременной перспективе загрузке. Наиболее важным является прогнозирование возможной перегрузки (превышения пропускной способности) узлов и каналов, которую при формализации задачи можно представить как возникновение выбросов случайного процесса, отражающего текущее суммарное значение трафика, над фиксированным порогом  $Q$ . При решении задач прогнозирования важную роль играет долговременная зависимость, обусловленная фрактальной структурой случайных процессов в больших ТКС, которая была рассмотрена в ряде работ [1]–[4]. На основе полученных результатов предложен способ прогнозирования динамики выбросов трафика в ТКС на основе интервальных статистик предыдущих выбросов [5], [6].

В настоящей статье наряду с указанным подходом рассмотрен подход, связанный с поиском характерного предиктора превышения порога, определяемого набором значений трафика в моменты времени, предшествующие выбросу. Сравнительный анализ подходов проведен применительно к прогнозированию динамики суммарного поминутного исходящего трафика нескольких HTTP-серверов на временных интервалах длительностью от

одних суток до одного года. В анализе использованы данные, размещенные для исследовательских целей в сети Internet на узле <http://www.nlanr.net><sup>5</sup>.

В основе прогнозирования выбросов случайного процесса на основании предикторов лежит поиск типичного предиктора такого выброса, т. е. характерного поведения случайного процесса в моменты времени, непосредственно предшествующие возникновению выброса. Рассмотрим предиктор  $y_{n,k}$  выброса  $y_n > Q$  случайного процесса  $y_n$ , ожидаемый в момент времени  $n$ , состоящий из  $k$  отсчетов случайного процесса, предшествующих выбросу:  $y_{n,k} = y_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots, y_{n-1}$ . Первая модификация рассматриваемого подхода заключается в анализе по доступным реализациям случайного процесса только тех последовательностей длительностью  $k$ , за которыми последовали выбросы. В этом случае ключевой величиной является апостериорная вероятность  $P(y_{n,k} | y_n > Q)$ . Основным недостатком данного подхода является исключение из процедуры анализа всех доступных фрагментов, кроме фрагментов, непосредственно предшествовавших состоявшимся выбросам. В результате не используется информация о последовательностях, заведомо нетипичных в качестве предикторов. Альтернативным подходом являются анализ всех последовательностей  $y_{n,k} = y_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots, y_{n-1}$  длительностью  $k$  по всем доступным реализациям случайного процесса (в скользящем окне) и оценка условной вероятности  $P(y_n > Q | y_{n,k})$  превышения заданного порога  $Q$  в момент времени  $n$ , следующий непосредственно за последовательностью  $y_{n,k}$ . В работе [7] показано, что второй подход более эффективен применительно к широкому классу случайных процессов с кратковременной и долговременной зависимостями отсчетов.

Во втором подходе простейшим вариантом построения алгоритма принятия решений являются выбор наиболее вероятного предиктора  $y_{n,k}$  и при дальнейшем анализе вычисление в режиме реального времени отклонения от него – получаемых последовательностей отсчетов процесса длительностью  $k$  с заданием той или иной метрики отклонения. При этом критерий для принятия решения об ожидании выброса в следующий момент времени – значение расстояния ниже некоторого порогового значения. Подобный подход весьма эффективен при работе с простыми системами, где функция  $P(y_n > Q | y_{n,k})$  имеет один выраженный экстремум, который и является глобальным максимумом. Однако при работе с большими системами, такими, как системы массового обслуживания, для которых характерно совместное саморегулируемое поведение множества пользователей, нельзя исключить возможность появления более сложных зависимостей  $P(y_n > Q | y_{n,k})$ , в том числе имеющих несколько сопоставимых по величине экстремумов. В многоэкстремальном случае выбор наиболее вероятного предиктора малоэффективен и для анализа приходится хранить полную базу данных предикторов  $y_{n,k}$  и соответствующих им вероятностей выбросов, полученную из доступных реализаций случайного процесса, использованных для обучения алго-

<sup>5</sup> The national laboratory for applied network research (NLANR) // <http://www.nlanr.net>

ритма. Тогда критерием принятия решения об ожидании выброса в следующий момент времени является превышение вероятностью  $P(y_n > Q | y_{n,k})$  некоторого заранее заданного порога  $Q_{\text{п}}$ . Выбор оптимального значения  $Q_{\text{п}}$  в общем случае основывается на минимизации суммарных потерь от неправильных решений, принимаемых при прогнозировании, в зависимости от априорно заданных значений потерь при ложной тревоге и при пропуске выброса.

Данный подход требует формирования базы данных всех возможных предикторов выбросов и соответствующих им вероятностей возникновения выброса. Создание такой базы возможно либо на основе анализа доступной информации о предшествующей динамике трафика в исследуемом канале или в узле (либо в иных каналах или узлах, где динамика трафика описывается аналогичными статистическими характеристиками) при наличии достаточного объема обучающей выборки, либо на основании анализа математических моделей, способных адекватно описать динамику трафика в узле или в канале ТКС. В работе [6] были описаны классы моно- и мультифрактальных моделей, в целом успешно характеризующие динамику выбросов на уровне оценки их интервальных статистик. Вопрос о том, насколько адекватным является описание предикторов выбросов (которые сами в большинстве своем не являются выбросами, т. е. не превышают порог  $Q$ ) с помощью данных моделей, остается открытым. Подбор параметров фрактальных моделей может быть осуществлен на основании результатов флуктуационного анализа доступных фрагментов динамики трафика в узле или в канале, подробно рассмотренному в [8]<sup>6</sup>.

Альтернативным вариантом является обучение алгоритма прогнозирования на основе математических конструкций, имитирующих совместное поведение пользователей на основе известных представлений о динамике доступа к системам массового обслуживания. В этом контексте в первую очередь следует отметить модели динамики поведения на основе очередей, разработка которых ведется достаточно давно, однако их активное применение длительное время сдерживалось ограниченными вычислительными ресурсами. Одной из наиболее простых и получивших широкое применение в последние годы является модель, описывающая одиночный источник на основе очереди с приоритетами [9]. Ряд аналитических результатов для этой модели получен в [10]. В работе [11] показано, что данная модель адекватно отражает динамику трафика в телекоммуникационных системах, в том числе на примере анализа исходящего трафика HTTP-серверов.

Рассмотрим поведение одиночного пользователя, выполняющего ряд задач при работе на ЭВМ, в том числе приводящих к формированию HTTP-запросов. Упрощенная модель предполагает наличие фиксированной длины очереди из задач, выполняемых одним пользователем, длина которой ограничена  $L$  задачами в силу ограничения физических возможностей человека управлять большим числом задач одновременно. Каждой из задач в очереди соответствует приоритет  $x_i$ ,  $i \in [1, L]$ . В простейшем случае значения приоритета берутся из равномерного распределения. При этом в каждую единицу времени выполняется одна задача (один шаг итерации), причем с вероятностью  $P$  выполняется задача с наивысшим приоритетом, а с вероятностью  $1 - P$  – случайная задача из очереди вне зависимости от ее

<sup>6</sup> Краткий обзор см. также в [6].

приоритета. Для сохранения фиксированной длины очереди в каждую единицу времени к очереди добавляется новая задача со случайным приоритетом  $x$ .

Плотности вероятности времен ожидания для такой модели при различных значениях параметра  $P$ , полученные статистическим моделированием для очереди из  $L = 256$  задач, приведены на рис. 1 (кривые 1 отражают распределения интервалов между запросами, формируемыми одиночным пользователем, кривые 2 – результат аппроксимации кривых 1 гамма-распределением). При значениях  $P \rightarrow 0$  поток событий сводится к пуассоновскому потоку и времена ожидания задачи от момента постановки в очередь до момента выполнения характеризуются экспоненциальной плотностью вероятности  $\rho(\tau) \sim \exp(-\tau)$ . При значениях  $P \rightarrow 1$  распределение приближается к степенному закону  $\rho(\tau) \sim \tau^{-1}$ . В общем случае распределение времен ожидания может быть описано распределением Эрланга (или частным случаем гамма-распределения); при этом плотность вероятности  $P \sim [\lambda^\alpha / \Gamma(\alpha)] \tau^{\alpha-1} \exp(-\lambda\tau)$ ,  $\lambda = \alpha = 1 - P$ . Данный результат не противоречит теоретическим положениям [10], [11] и подтверждается результатами статистического моделирования. Отклонения от теоретической зависимости при  $\tau \gg \bar{\tau}$  и при  $\tau \ll \bar{\tau}$  объясняются эффектами дискретности модели, а также влиянием ограниченной длины очереди и всей реализации последовательности времен ожидания.

На основании обобщения этой модели может быть получена оценка динамики суммарного трафика НТТР-сервера при одновременном доступе к нему  $N$  пользователей. Поскольку не каждая из выполняемых пользователем задач связана с обращением к анализируемому серверу, выполняемые задачи следует разделить на потоки. При этом для анализа интересен только один поток, связанный к обращением к конкретному НТТР-серверу.

Логика запросов к НТТР-серверу в подавляющем большинстве случаев позволяет предположить последовательность выполнения запросов, когда после получения ответа на предыдущий запрос (отображения web-страницы) происходит постановка в очередь новых задач, связанных с обращением к данному НТТР-серверу (сле-

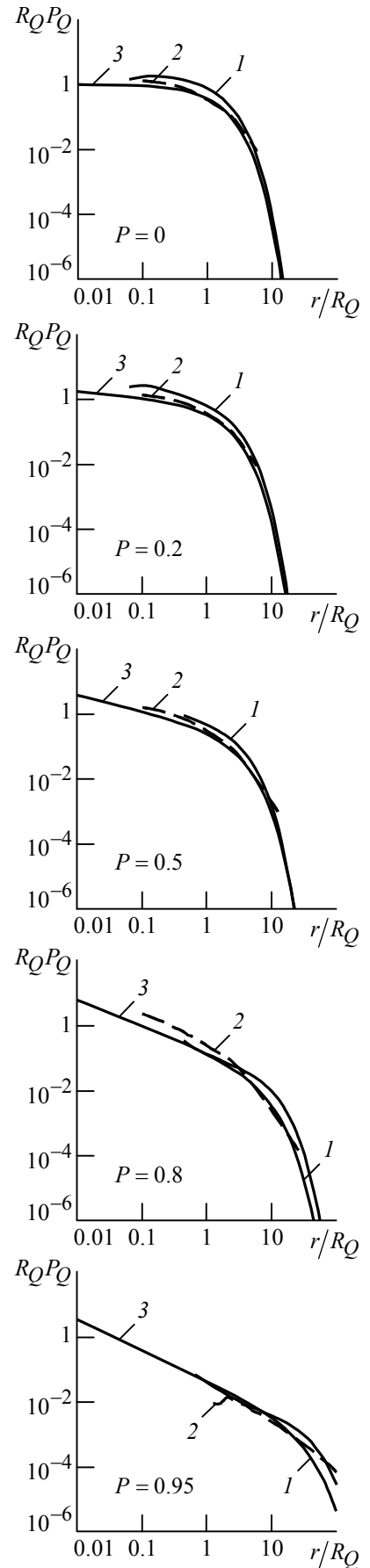


Рис. 1

дование новой ссылке). При этом в промежутке могут выполняться и другие задачи, связанные с обработкой информации, в частности полученной в результате ответов на предыдущие запросы. Следуя этому предположению, можно получить последовательности интервалов ожидания для одного потока, а с учетом известных результатов о распределении размеров пакетов откликов HTTP-сервера, – реализацию случайного процесса, характеризующего суммарный исходящий трафик, направленный одному пользователю. При суммировании  $N$  реализаций можно получить суммарный исходящий трафик, направленный  $N$  пользователям.

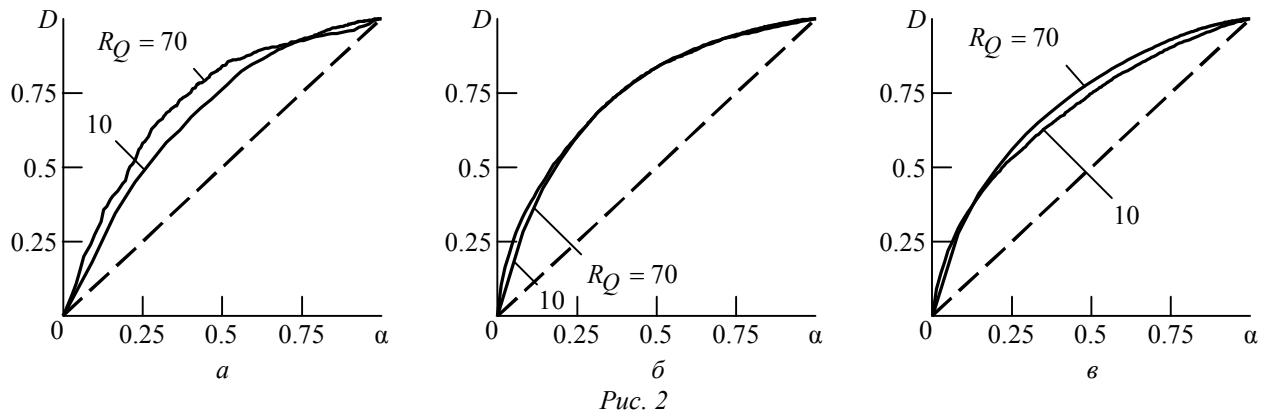
Для оценки свойств суммарного трафика проведено статистическое моделирование с параметрами  $L = 256$  и  $N = 1024$ . При моделировании использовались результаты эмпирической оценки распределения значений трафика HTTP-сервера за один год. Результаты моделирования указывают на то, что распределение интервалов между выбросами суммарного трафика над фиксированным значением  $Q$ , соответствующим средним интервалам повторения  $R_Q$  10 и 70, в широком диапазоне значений аргумента также может быть охарактеризовано гамма-распределением (см. рис. 1, кривые 3).

Для оценки эффективности прогнозирования с использованием кратковременной динамики трафика формировалась база данных предикторов на основе анализа набора реализаций, соответствующих монофрактальным моделям со значениями параметра  $h_2$  в диапазоне  $0.5 \dots 1.0$ ; мультифрактальным моделям, полученным методом мультипликативного каскада, с параметрами  $\bar{m} = 0$ ,  $\sigma_m = 1$  ( $h_2 = 0.5$ ) и  $\bar{m} = 1$  при  $\sigma_m$  в диапазоне  $1 \dots 0.1$  ( $\sigma_m = 1$  соответствует  $h_2 \approx 0.98$ )<sup>7</sup>, а также реализаций суммарного трафика, полученных при помощи модели с очередями и приоритетами, рассмотренной ранее, для значений вероятности  $P$  в диапазоне  $0 \dots 0.99$ . Вероятности превышения порога  $Q$  оценивались для всех возможных предикторов, состоящих из  $k = 2$  отсчетов, предшествующих выбросу, квантованных по уровню на  $l = 100$  элементов каждый, т. е. в общей сложности для  $10^4$  предикторов. Для оценки информативности долговременной зависимости использовалась информация только о времени, прошедшем с момента появления последнего выброса. Для этого с порогом вероятности  $Q_{\Pi}$  сравнивалась ограниченная неубывающая функция, принимающая единичное значение сразу после произошедшего выброса и монотонно убывающая по мере удаления от выброса, асимптотически приближаясь к нулю<sup>8</sup>.

<sup>7</sup> Мультифрактальные модели наряду с линейной зависимостью (корреляцией) способны также учитывать зависимости более высоких порядков между отсчетами временного ряда. При этом с увеличением отношения  $\bar{m}/\sigma_m$  происходят рост линейной и ослабление нелинейной зависимостей. Более подробно свойства мультифрактальных моделей класса мультипликативного каскада, рассмотрены, например, в работе [6], где также приведены характерные для них значения показателей Херста  $h$ .

<sup>8</sup> Как правило, в качестве такой функции используется оценка вероятности, полученная интегрированием плотности вероятности распределения интервалов [5], [6]. В этом случае она становится зависимой от используемой модели данных и ее параметров. Однако для построения рабочей характеристики конкретная форма данной функции не имеет значения (так как оценка в любом случае производится для всевозможных значений  $Q_{\Pi}$ ), имеют значение только ее монотонность и корректное выполнение граничных условий.





В дальнейшем для сравнительного анализа результатов прогнозирования полученные оценки вероятностей  $P(y_n > Q | y_{n,k})$  сравнивались с порогом  $0 < Q_{\text{п}} < 1$  и строились рабочие характеристики прогнозирования (ROC-кривые). Для этого при каждом значении  $Q_{\text{п}}$  оценивались вероятность правильного обнаружения  $D$  и вероятность ложной тревоги  $\alpha$ .

На рис. 2, а–в приведены рабочие характеристики прогнозирования с использованием метода на основе интервальных статистик, предложенного в [5], [6]. Характеристики построены для типичных записей трафика трех различных HTTP-серверов<sup>9</sup> длительностью один месяц (рис. 2, а), полгода (рис. 2, б) и один год (рис. 2, в) при значениях 10 и 70 средних интервалов повторения  $R_Q$ . Диагональ  $D = \alpha$  соответствует характеристике случайного прогнозирования с учетом только среднего интервала возникновения событий, равного  $R_Q$ . Кривые прогнозирования для реализаций трафика каждого из трех серверов для каждого из значений  $R_Q = 10$  и  $R_Q = 70$  лежат значительно выше диагонали, что указывает на возможность прогнозирования. Пунктирными линиями показаны сечения тел рабочих характеристик, соответствующие вероятности ложной тревоги  $\alpha = 0.3$ . По крайней мере в двух из трех приведенных случаев рабочая характеристика прогнозирования для  $R_Q = 70$  на всем протяжении лежит не ниже характеристики для  $R_Q = 10$ .

При использовании подхода на основе поиска характерных предикторов с усилением зависимости (для фрактальных моделей) или с увеличением времени корреляции (для моделей с использованием очередей) вероятность правильного обнаружения  $D$  при фиксированной вероятности ложной тревоги  $\alpha$  растет. Эта вероятность достигает тех же значений, что и получаемые с использованием долговременной зависимости, при достижении параметрами модели типичных значений показателя Херста для реализаций трафика  $h_2 \approx 0.6$  (при использовании фрактальных моделей) или при достижении интервала корреляции, значительно превышающего средний интервал между выбросами  $R_Q$  (при использовании моделей на основе очередей). При дальнейшем усилении зависимости или увеличении времени корреляции вероятность ложной тревоги несколько превышает значения, характерные для учета долговременной зависимости.

<sup>9</sup> The national laboratory for applied network research (NLNR) // <http://www.nlanr.net>

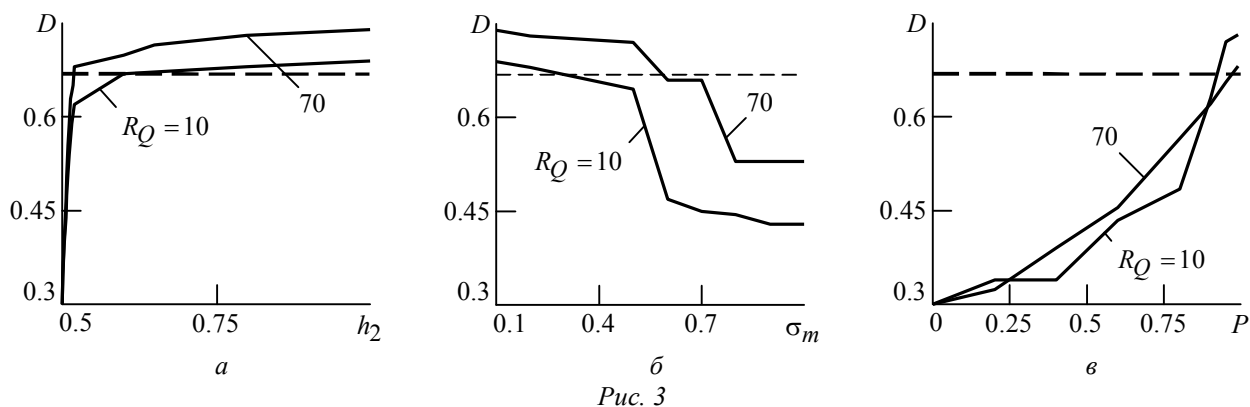


Рис. 3

В качестве иллюстрации описанной ситуации на рис. 3, *а* приведены функции  $D(h_2)$  для монофрактальной модели, на рис. 3, *б* – функции  $D(\sigma_m)$  для мультифрактальной модели и на рис. 3, *в* – функции  $D(P)$  для модели с использованием очередей. Во всех случаях приведенные примеры соответствуют серверу № 2 (см. рис. 2, *б*) и вероятности ложной тревоги  $\alpha = 0.3$ . Штриховыми горизонтальными линиями на этих рисунках показаны значения вероятности правильного обнаружения при использовании метода интервальных статистик, учитывающего информацию о долговременной зависимости. Следует отметить, что аналогичные результаты были получены и при анализе динамики исходящего трафика трех серверов, которые не отражены на рис. 2.

Таким образом, за счет использования адекватных феноменологических фрактальных моделей и адекватной физической модели с использованием очередей удалось найти характеристики прогнозирования, достигающие (и даже несколько превышающие) характеристики, полученные при использовании их долговременной зависимости, но лишь за счет информации о значениях трафика в течение двух минут, предшествующих выбросу. Вместе с тем, в ряде случаев прогнозирование с использованием долговременной зависимости на основе интервальных статистик может быть более предпочтительным по сравнению с использованием кратковременной зависимости, так как не требует ресурсоемкой процедуры обучения алгоритма и хранения базы данных предикторов и соответствующих им вероятностей превышения порога в следующие моменты времени. Кроме того, данный подход позволяет осуществлять и более долгосрочный прогноз.

Дальнейшее развитие предложенного подхода предполагает дополнение алгоритма долгосрочного прогнозирования функцией учета информации о предыдущих интервалах между ранее состоявшимися выбросами случайного процесса, а также синтезом и последующим анализом различных модификаций комбинированного подхода, предполагающего совместный учет информации о долговременной и кратковременной динамиках анализируемого процесса в предположении, что извлекаемая при применении каждого из подходов информация является взаимно дополняющей.

### Список литературы

1. Шелухин О. И., Тенякшев А. М., Осин А. В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. М.: Радиотехника, 2003. 576 с.
2. The changing nature of network traffic: Scaling phenomena / A. Feldmann, A. C. Gilbert, W. Willinger, T. G. Kurtz // ACM SIGCOMM comp. com. review. 1998. Vol. 28. Is. 2. P. 5–29.
3. Feldmann A., Gilbert A. C., Willinger W. Data networks as cascades: Investigating the multifractal nature of Internet WAN traffic // ACM SIGCOMM comp. com. review. 1998. Vol. 28. Iss. 4. P. 42–55.

4. A multifractal wavelet model with application to network traffic / R. H. Riedi, M. S. Crouse, V. J. Ribeiro et al. // IEEE Trans. inf. theor. 1999. Vol. IT-45, № 4. P. 992–1018.
5. Bogachev M. I., Eichner J. F., Bunde A. Effect of nonlinear correlations on the statistics of return intervals in multifractal data sets // Phys. rev. lett. 2007. Vol. 99. P. 240601(1–4).
6. Богачев М. И. Статистический анализ и прогнозирование динамики случайных процессов в телекоммуникационных сетях с использованием мультифрактальных моделей трафика // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2008. Вып. 2. С. 34–45.
7. Precursors of extreme increments / S. Hallerberg, E. G. Altmann, D. Holstein, H. Kantz // Phys. rev. E. 2007. Vol. 75. P. 016706(1–9).
8. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series // J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde et al. // Physica A. 2002. Vol. 316. P. 87–114.
9. Barabasi A. L. The origin of bursts and heavy tails in human dynamics // Nature (London). 2005. Vol. 435. P. 207–211.
10. Vazquez A. Exact results for the Barabasi model of human dynamics // Phys. rev. lett. 2005. Vol. 95. P. 248701(1–4).
11. Modeling bursts and heavy tails in human dynamics / A. Vázquez, J. G. Oliveira, Z. Dezsö et al. // Phys. rev. E. 2006. Vol. 73. P. 036127(1–19).

*M. I. Bogachev*

*Saint-Petersburg state electrotechnical university "LETI"*

#### **Comparative estimation of the informative efficiency of the short-term and long-term dependence for prognosis of the traffic dynamics in telecommunication systems**

*Two general approaches to predict exceeding of a certain threshold by the total traffic in telecommunication systems are compared. The first approach is based on the analysis of short-term precursors of such an exceeding event, the second one exploits long-term dependence via interval statistics. Learning of the short-term precursors based algorithm is performed either on the fractal models, or on the queuing models with priorities, representing the joint behavior of multiple users' access to a single server. It is shown that by exploiting the latter model, the same (or even slightly higher) predicting characteristics can be achieved as when considering the long-term dependence, but now by considering only the latter two minutes of traffic. The conclusions are supported by the results of statistical modeling and by the results of analysis of the HTTP-servers outgoing traffic with durations varying from one day to one year.*

Predicting, short-term dependence, long-term dependence, telecommunication systems, fractal models, queuing models

Статья поступила в редакцию 25 сентября 2008 г.



**Системы телекоммуникации, устройства передачи, приема и обработки сигналов**

УДК 616.31

**Е. В. Садыкова, Ахмед М. А. Абдува**

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"*

## **Система поддержки принятия решений врача-бактериолога микробиологической лаборатории**

*Представлена система поддержки принятия решений врача бактериологической лаборатории для регистрации микробиологических исследований, ведения электронных журналов, составления отчетов, проведения контроля качества медицинских действий и прогноза заражения внутрибольничной инфекцией.*

### **Система поддержки принятия решений, СУБД Cache, микробиологические исследования, электронный журнал бактериологической лаборатории**

Одним из направлений интенсивного внедрения компьютерных технологий в каждодневную практику персонала лечебно-профилактических учреждений (ЛПУ) является создание систем поддержки принятия решений (СППР).

СППР медицинских специалистов при своевременном и правильном использовании повышают качество обслуживания населения и помогают осуществлять постановку диагноза, оптимально сочетая опыт врача с возможностями автоматизации сбора и интерпретации диагностических данных, ведения медицинской документации, создания баз знаний о заболеваниях, которые позволяют формировать алгоритмы диагностики и лечения больных [1].

Разработка СППР для бактериологической клинико-диагностической лаборатории (КДЛ) ЛПУ является непростой задачей из-за специфичности используемых методик, результатом которых являются выделение и идентификация микроорганизма с рядом характеристик его биологических свойств, включая чувствительность к антимикробным химиотерапевтическим препаратам. Длительность проведения бактериологических исследований в КДЛ варьируется от двух до десяти дней. Интерпретация результатов требует высокого профессионализма от врача-бактериолога [2].

При формировании результата необходимо проанализировать весь ход бактериологического исследования, поэтому врач регистрирует и описывает каждый этап. Ежедневно врач-бактериолог заполняет до семи и более журналов вручную. Таким образом, для регистрации результатов анализов в ходе исследования врач-бактериолог в день затрачивает более 2–3 ч. Еще больше времени тратится на составление статистических отчетов о работе лаборатории за определенный период времени.

После проведенных бактериологических исследований на основании полученных данных можно построить прогноз заражения больных стационара внутрибольничной ин-

фекцией. Поэтому результаты имеют значение не только для пациента, у которого проводились аналитические исследования, но так же и для всех больных ЛПУ [3].

В связи с реализацией в Санкт-Петербурге "Программы информатизации системы здравоохранения 2008–2010 гг." и высокой потребностью в специализированных информационных системах для практического здравоохранения актуальной задачей является разработка СППР для автоматизации регистрации и учета проведенных аналитических исследований и всестороннего анализа полученной диагностической информации.

Специалистами кафедры биомедицинской электроники и охраны среды Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина) на основе данных, предоставленных специалистами бактериологической лаборатории детской инфекционной больницы № 5 имени Н. Ф. Филатова, разработана СППР "BakLab" врача-бактериолога для ЛПУ инфекционного профиля.

**Технология разработки СППР "BakLab".** При разработке системы поддержки принятия решений врача бактериологической лаборатории "BakLab" использовалась CASE-технология.

СППР "BakLab" разрабатывалась в несколько этапов. Построена модель предметной области, произведено отображение этой модели в модель данных, и по модели данных созданы физические структуры данных. Таким образом, выделено два уровня представления модели данных – логический и физический.

На этапе моделирования данных на логическом уровне разработана концептуальная модель, которая отображена в систему баз данных. Объектами модели на логическом уровне являются сущности и атрибуты.

На физическом уровне данные зависят от выбранной СУБД, фактически являясь отображением системного каталога. В физической модели содержится информация обо всех объектах базы данных (БД).

СУБД имеет древовидную структуру в виде ориентированного графа. В БД данные представлены в виде набора узлов. Каждый узел дерева хранит данные и имеет некоторое количество ориентированных связей с узлами-потомками. В структуре не требуется, чтобы узлы-потомки и узлы, имеющие один узел-предок, были одного типа. Узел содержит открытый список связей с многочисленными узлами того же типа, разрешая прямое представление связей "многие–к–многим".

Физически СППР реализован на языке СУБД Cache, и поэтому данные хранит в виде глобальных разряженных деревьев с символьной упорядоченностью узлов. Представление данных объекта можно упрощенно описать в виде деревьев "^Словарь" и "^Таблица№". Знак "^" в именованной метке дерева означает в СУБД Cache, что это дерево должно храниться в БД. Деревья имеют следующие структуры.

^Таблица№: ('Код записи', 'Название атрибута') = 'Значение атрибута';

^Словарь: ('Название атрибута', 'Значение атрибута', 'Номер таблицы', 'Код Записи') = "".

Один экземпляр такого объекта представляет собой совокупность нескольких деревьев "^Таблица№" (их названия отличаются номером №) и части дерева "^Словарь", определяющей совокупностью названий атрибутов, включенных в этот экземпляр объекта.

Каждое дерево "<sup>^</sup>Таблица№" определяет массив данных, который можно рассматривать как таблицу со столбцами, именованными названиями имеющихся в этой таблице атрибутов, и строками, именованными кодом записи. Значения дерева "<sup>^</sup>Таблица№" являются полями данной таблицы и рассматриваются как значения атрибутов.

В каждой таблице названия всех столбцов и строк разные. Для любых двух таблиц в пределах одной БД совпадение кодов записей роли не играет, а совпадение части названий атрибутов, напротив, весьма существенно, так как обеспечивает связь между разными таблицами. Связь осуществляется через общие значения атрибутов с одинаковыми названиями. Связи таблиц из разных экземпляров объектов свидетельствуют о связанности этих экземпляров между собой.

Связь между таблицами осуществляется с помощью дерева "<sup>^</sup>Словарь" при условии, что значениями атрибутов являются слова. В объекте СППР существует одно дерево "<sup>^</sup>Словарь" для всей совокупности имеющихся данных. Это дерево определяет массив данных, который можно рассматривать как множество словарей атрибутов, по одному на каждое название атрибута. Словарь атрибута можно рассматривать как совокупность отсортированных в алфавитно-цифровом порядке слов (значений соответствующего атрибута), записанных вертикально в столбце. Справа от этих слов приписана одна пара или несколько пар "номер таблицы/код записи". Каждая такая пара является "адресом" вхождения данного слова.

У каждого слова таких "адресов" может быть один или несколько. Два или несколько разных значений одного атрибута связаны между собой, если им приписаны одинаковые "адреса".

СППР содержит в себе четыре основных программных класса: класс доступа к базе данных, класс доступа к оконному интерфейсу, класс-библиотеку отработки методов по умолчанию и класс-транслятор. Трансляция спроектированного объекта в исполняемый код осуществляется транслятором, исходя из строк описания этого объекта. Полученный класс содержит в себе базовый алгоритм, описание всех экранных форм спроектированного

объекта и тексты всех переопределенных методов. При исполнении методов класс проверяет наличие в себе переопределенных методов и в случае их отсутствия обращается к модулю-библиотеке методов по умолчанию. Взаимодействие класса с базой данных и оконным интерфейсом осуществляется через модули.

Спецификация объектов и понятий БД "Справочная информация" приведена в таблице.

Большое внимание при разработке СППР "BakLab" уделено экранным формам, которые содержат в себе совокупность исполняемых элементов – методов. В общем случае

Элемент	Код	Значение кода	Длина кода	Тип данных	Ключ
Объект	102	Справочники	2	–	–
	S1	Справочник биоматериалов	3	–	–
	S11	Биоматериал 1-го уровня	4	–	–
Понятие	kMat	Код материала	–	FREE	Ключ
	aMat	Вид материала	–	FREE	–
Объект	S112	Биоматериал 2-го уровня	6	–	–
Понятие	kMat	Код материала	–	FREE	Ключ
	aMat	Вид материала	–	FREE	–
Объект	S2	Справочник отделений	3	–	–

метод представляет собой алгоритм, состоящий из других методов более низкого уровня, связанных между собой М-кодом. Совокупность всех имеющихся методов образует сетевую структуру, на нижнем уровне которой находятся М-функции работы с базой данных и функции работы с оконным интерфейсом. Для пользователя доступен весь набор методов, из которых он может составить интересующий его алгоритм и оформить его в виде отдельного метода.

**Описание СППР "BakLab".** Бактериологическая КДЛ выполняет следующие виды деятельности:

- исследование материала, полученного от больных с признаками заболевания микробной этиологии;
- оценку эпидемиологической ситуации в отделениях на основе анализа результатов бактериологических исследований за определенный период времени;
- участие в разработке тактики использования химиотерапевтических препаратов на основании данных о возбудителях, выделяемых в стационаре, и динамики изменения их чувствительности к антибиотикам.

На основании описания деятельности бактериологической лаборатории [1], разработанная СППР "BakLab" выполняет следующие функции (рис. 1):

- регистрацию поступивших заявок на бактериологические исследования;
- ведение журналов бактериологических исследований;
- ввод и распечатку результатов исследований бактериологической лаборатории;
- печать регистрационных журналов бактериологической лаборатории;
- обеспечение быстрого поиска и доступа к информации о проведенных исследованиях;
- формирование статистических отчетов о работе лаборатории за определенный период времени;
- проведение внутрилабораторного контроля качества;
- прогнозирование заражения больных внутрибольничной инфекцией;
- информационную поддержку врача в виде справочной информации медицинского назначения.

**Структура СППР "BakLab".** Структура СППР представлена на рис. 1 в виде схемы взаимосвязей между базами данных. При разработке системы спроектировано три БД, в которых хранится информация о пациентах и об аналитических исследованиях, проведенных лабораторией, о статистических методах обработки данных для построения прогноза заражения больных внутрибольничной инфекцией, а также справочная информация для поддержки принятия решений врача-бактериолога: БД "Карта пациента"; БД "Бактериологические журналы"; БД "Справочная информация, статистические методы". Схема взаимосвязей между БД представлена на рис. 2.

БД "Карта пациента" включает в себя сведения о пациенте, которые заносятся при его первой регистрации, сведения о лабораторном анализе, о назначенных и проведенных исследованиях, о ходе исследований, а также об их результатах.

Экранная форма "Карта пациента" – форма для первичной регистрации пациента в БД (ввода общих сведений о пациенте), регистрации лабораторного анализа и назначения необходимых исследований.

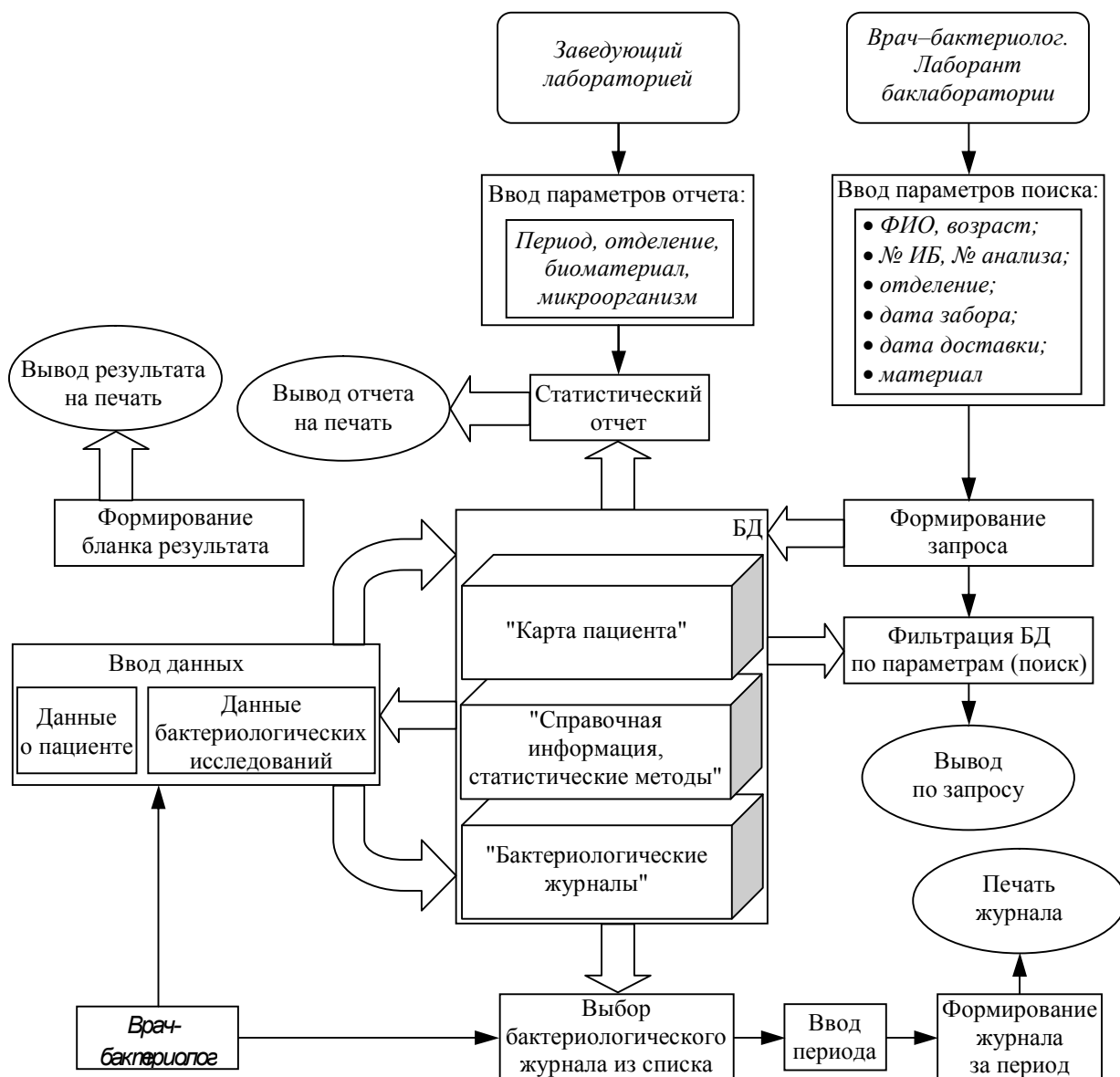


Рис. 1

Каждому исследованию соответствует экранная форма. Формы содержат сведения о лабораторном эпизоде и поля для описания хода исследования. В каждой форме есть меню для переключения соответствующих разделов описания исследования.

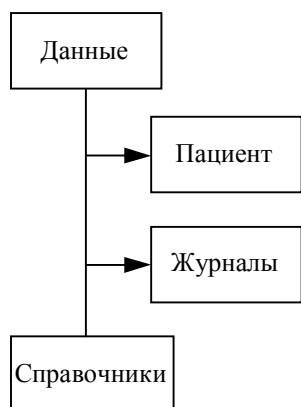


Рис. 2

БД "Бактериологические журналы" – журнал, автоматически формируемый на основании данных о пациенте и ходе проведенных исследований, взятых из БД "Карта пациента". На рис. 3 в качестве примера приведена экранная форма "Журнал исследований на возбудителей гнойно-септических исследований".

БД "Справочная информация, статистические методы" является справочным средством поддержки принятия решений врача-бактериолога. Она содержит справочники и классификаторы, необходимые для ведения БД "Карта пациента" и "Бактериологические журналы". Справочники заполняются сотрудниками лабора-



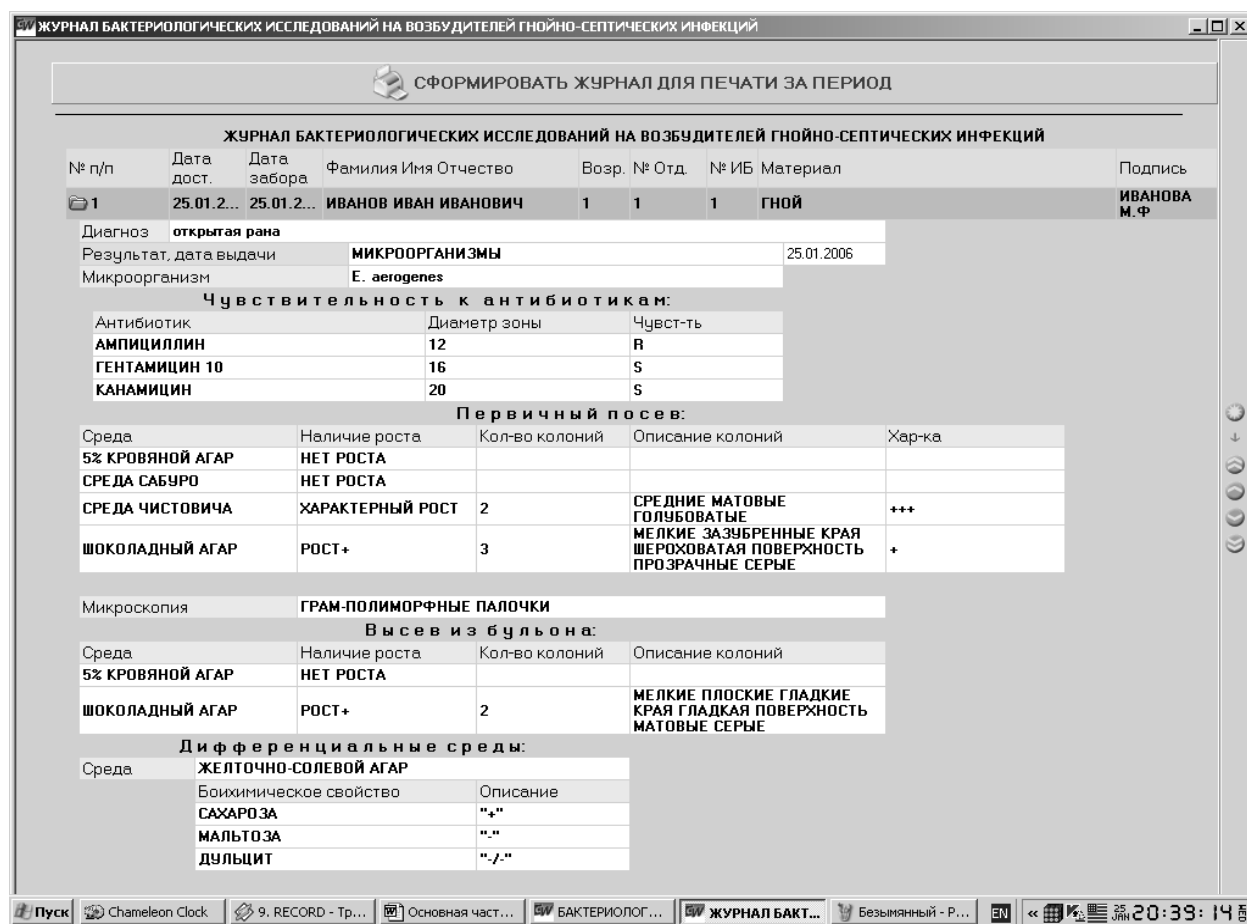


Рис. 3

тории и дополняются в процессе работы. На рис. 4 представлена экранная форма "Ведение справочников", применяемая при заполнении и корректировке содержимого справочников.

Информация, введенная в справочники, используется при заполнении соответствующих полей выбором значений из развертывающихся списков. В справочниках с большим количеством информации предусмотрена многоуровневость. Указанный способ представления справочной информации позволяет обобщить схожую информацию по тем или иным признакам. В СППР такими справочниками являются справочник биоматериалов, справочник антибиотиков, справочник микроорганизмов, справочник диагностических сывороток и справочник описания колоний.

**Прогноз заражения внутрибольничной инфекцией.** Одним из критериев качества оказания медицинской помощи является показатель заболеваемости внутрибольничными инфекциями (ВБИ). Актуальность проблемы определяется слабым знанием специалистами практического здравоохранения реальной заболеваемости ВБИ в стационарах, что обусловлено сложностью их учета и недостаточностью проводимых профилактических и противоэпидемических мероприятий, а также наносимым такими заболеваниями значительным экономическим ущербом. СППР осуществляет прогноз заражения ВБИ на основе методов математической статистики.

Большую угрозу представляют ВБИ, связанные с распространением в стационарах полирезистентных к антибактериальным препаратам штаммов микроорганизмов. Выявле-

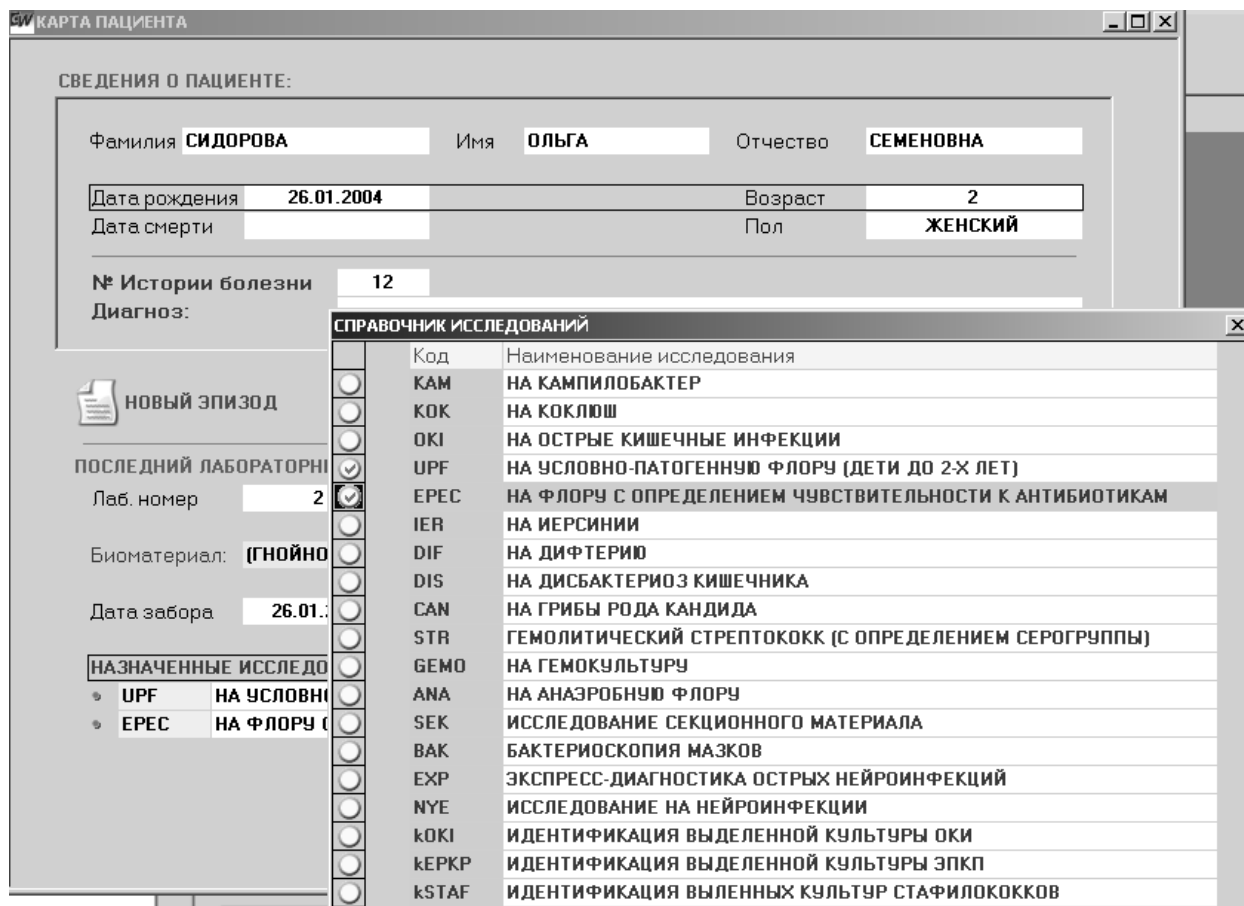


Рис. 4

ние таких штаммов, прерывание путей их распространения – одна из важных и труднорешаемых задач микробиологической и эпидемиологической служб. В СППР "BakLab" автоматически осуществляется поиск штаммов микроорганизмов, резистентных к четырем и более антибактериальным препаратам при полной идентичности антибиотикограммы на остальные приведенные в анализе антибиотики. В результате формируется список выбранных полирезистентных микроорганизмов с указанием для каждого из них количества и перечня антибиотиков, к которым данный микроорганизм устойчив.

Система дает возможность отобразить списки больных, у которых выделены полирезистентные штаммы, на основании чего делается заключение о наличии признаков госпитального штамма и возможных путей его передачи.

**Получение результатов и составление отчетов.** После проведения исследования и регистрации всех его этапов врач-бактериолог должен зафиксировать в СППР результат, полученный в ходе исследования. Если в результате исследования патогенные микроорганизмы не выявлены и не обнаружен их рост, то в соответствующее поле системы вводятся значения "Нет роста", "Условно-патогенная флора не обнаружена", "Отрицательно" и другие. Если в ходе исследования были обнаружены микроорганизмы, то вводится значение "Микроорганизмы" и из справочника выбираются выделенные виды микроорганизмов. На основании ранее введенных в систему данных о предельных значениях диаметра зон задержки роста автоматически определяется степень чувствительности: R – устойчив; I –

умеренно устойчив; S – чувствителен. Значения степени чувствительности вносятся в отведенное поле для каждого антибиотика. Врач имеет возможность скорректировать полученный результат и изменить степень чувствительности по своему мнению. Если данные, заложенные в алгоритм, устарели

БАКТЕРИОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ № 2  
 ФИО пациента: СИДОРОВА ОЛЬГА СЕМЕНОВНА  
 № Истории болезни: 12  
 № отделения: 1  
 Биоматериал: (ГНОЙНОЕ) ОТДЕЛЯЕМОЕ РАН  
 Диагноз: открытая рана  
 РЕЗУЛЬТАТ: МИКРООРГАНИЗМЫ  
Микроорганизмы:  
**S. flexneri 1a**  
 Антибиотикограмма:  
 БЕНЗИЛПЕНИЦИЛЛИН I  
 ГЕНТАМИЦИН 120 S

Возраст 2

Рис. 5

или были изменены, то необходимо ввести новые значения в справочник антибиотиков. Перечень антибиотиков соответствует международной классификации, а справочник микроорганизмов – последнему изданию "Определителя бактерий Берджи". Справочная система разработана таким образом, что позволяет пользователю самостоятельно дополнять все существующие классификаторы в связи с последними изменениями, а также пополнять словари развертывающихся списков, используемых при вводе информации. На основании фиксации результатов обследования СППЗ "BakLab" формирует бланк ответа (рис. 5).

Система включает возможность составления статистических отчетов, предусматривающих получение данных по количеству:

- проведенных анализов;
- обследованных больных;
- исследованных материалов (конкретного вида);
- положительных высевов;
- выделенных микроорганизмов отдельных наименований.

Врач может получить эти показатели за любой промежуток времени по конкретному отделению или в целом по стационару.

Поисковая система СППР "BakLab" позволяет найти пациента в БД по следующим параметрам:

- фамилия, имя, отчество;
- возраст;
- № истории болезни;
- № отделения;
- № анализа;
- дата забора материала;
- дата доставки материала;
- вид материала.

По заданным параметрам система осуществляет поиск и выводит результаты поиска на экран; карты найденных пациентов можно просмотреть, отредактировать или пополнить новыми данными.

В системе предусмотрена функция "Резервное копирование базы данных", позволяющая сохранять базу данных за определенный период в виде файла с дальнейшим восстановлением этих данных в случае необходимости.

### Список литературы

1. Садыкова Е. В. Информационные технологии в бактериологической лаборатории // Изв. СПбГЭТУ "ЛЭТИ". Сер. "Биотехнические системы в медицине и экологии". 2007. Вып. 1. С. 41–47.
2. Воробьев А. А., Кривошеина Ю. С. Основы микробиологии, вирусологии, иммунологии. М.: Академия, 2002. 230 с.
3. Алешукина А. В. Медицинская микробиология: Учеб. пособие. Ростов н/Дону: Феникс, 2003. 472 с.

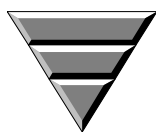
*E. V. Sadykova, Ahmed M. A. Abuowda*  
*Saint-Petersburg state electrotechnical university "LETI"*

#### **Decision-making support system for microbiological laboratory bacteriologist expert**

*Decision-making support system for bacteriological laboratory bacteriologist expert for microbiological researches registration, electronic journaling, reports drawing up, monitoring procedures of medical actions quality and intrahospital infection forecast on is presented.*

Decision support system, DBMS Cache, microbiological research, electronic register of a bacteriological laboratory

Статья поступила в редакцию 6 апреля 2009 г.



Радиолокация и радионавигация

УДК 621.396.62

С. П. Калениченко, В. А. Сокольников

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"

## Обработка радиолокационных сигналов в цифровых фильтрах с подавлением боковых лепестков функции отклика

*Рассмотрен метод подавления боковых лепестков в цифровых фильтрах сжатия сложных бинарных аperiodических сигналов. Подавление производят при обработке отклика в последовательно включенных фильтрах с временной инверсией сигнала. Приведен пример подавления боковых лепестков составного кода, построенного на основе последовательностей Баркера, в синтезированном цифровом фильтре.*

**Автокорреляционная функция, передаточная функция цифрового фильтра, боковые лепестки, согласованный фильтр, радиолокационная станция, инверсная фильтрация**

При использовании в радиолокации сложных фазоманипулированных сигналов важнейшей проблемой является уменьшение боковых выбросов отклика фильтра, сжимающего сигналы обнаруживаемых целей по дальности и по скорости. При работе радиолокационной станции в пассивных помехах боковые лепестки ухудшают помехоустойчивость станции, если зона, занимаемая помехой, совпадает с рабочей зоной на плоскости неопределенности. В настоящей статье рассмотрен метод подавления боковых выбросов на выходе цифрового фильтра, рассчитанного на обработку сложного сигнала с фазовой манипуляцией значениями 0 и  $\pi$ .

В отечественной и зарубежной литературе освещены несколько методов подавления боковых выбросов функции отклика фильтров, сжимающих сложные бинарные аperiodические сигналы. В [1], [2] рассмотрены методы подавления боковых выбросов от коротких бинарных кодов в рассогласованных с сигналом фильтрах (РФ), найденные по критериям минимизации отношения главного максимума к максимальному боковому лепестку выходного сигнала фильтра или к среднеквадратическому значению боковых лепестков. Для поиска решений использован аппарат отыскания условного экстремума функции многих переменных. Достоинство метода заключается в том, что главный максимум выходной реакции фильтра не расширяется. Однако импульсная характеристика фильтра оказывается в несколько раз длиннее исходного кода, что в ряде случаев затрудняет обработку сигнала, состоящего из нескольких сложномодулированных пачек импульсов. Подавление боковых лепестков сопровождается потерями в отношении "сигнал/шум" по сравнению с оптимальной величиной  $\psi_{СФ} = 2E/N_0$  ( $E$  – энергия сигнала;  $N_0$  – спектральная плотность гауссовского шума), получаемой в согласованном фильтре (СФ).

В [3] описаны методы подавления боковых выбросов длинных псевдошумовых бинарных кодов, формирующих аperiodический сигнал. В этой работе приведены примеры

подавления боковых выбросов выходных сигналов РФ с количеством квантов<sup>10</sup>, учитываемых фильтром, до 8191. Уровень подавления составил – 55 дБ при увеличении длины импульсной реакции фильтра в 3.6 раза по сравнению с исходной длительностью входного сигнала и потерями при рассогласовании до 0.7.

Цифровой алгоритм обработки радиолокационных сигналов с подавлением боковых лепестков функции отклика РФ за счет обращения во времени импульсной характеристики цифрового фильтра был предложен Е. Эрикматсом в патенте [4]. Использование алгоритма позволяет получить передаточную функцию для фильтра, согласованного с апериодическим фазоманипулированным сигналом с числом квантов  $N$ , в котором фазы колебаний в элементарных импульсах принимают значения 0 или  $\pi$ . В результате цифровой фильтрации на выходе получается единичный импульс, задержанный на удвоенную длительность входного сигнала.

Используя понятие комплексной огибающей, передаваемый сигнал можно выразить как

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_0(t - k\Delta T),$$

где  $N$  – число импульсов;  $c_k$  – комплексная амплитуда  $k$ -го импульса;

$s_0(t)$  – квант сигнала прямоугольной формы;  $\Delta T$  – длительность кванта.

Коэффициенты  $\{c_k\}_0^{N-1}$  образуют кодовую последовательность. Наиболее широко используются двоичные коды со значениями символов, равными + 1 и – 1. К этому классу принадлежат, например широко известные коды Баркера [2].

В качестве анализируемой кодовой последовательности рассмотрим код Баркера длиной 13:  $\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\}$ . При согласованной фильтрации такого сигнала нормированный уровень боковых лепестков на выходе равен – 22.27 дБ. Это требует поиска решений для минимизации боковых лепестков. Рядом авторов установлено, что для эффективного подавления боковых лепестков нужен фильтр с импульсной характеристикой, обратной во времени по отношению к сигнальной посылке. При подаче сигнала на вход такого фильтра на его выходе формируется одиночный импульс. Метод инверсной фильтрации ранее был отвергнут, поскольку представляющие интерес коды имеют нули вне единичной окружности на  $z$ -плоскости, что указывает на невозможность устойчивой схемной реализации инверсного фильтра с соответствующими полюсами [3].

Суть предлагаемого алгоритма можно описать следующим образом.  $z$ -Преобразование кодовой последовательности  $C(z)$  можно записать в виде

$$C(z) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k z^{-k} = P(z)Q(z),$$

где  $P(z)$  и  $Q(z)$  – полиномы, содержащие нули внутри и за пределами единичной окружности соответственно. Проиллюстрируем принцип данного разбиения на примере кода Баркера длиной 13. На рис. 1 показано положение корней полинома, описывающего код Баркера на комплексной плоскости. Если у полинома степени  $N$  имеется  $M$  нулей внутри

<sup>10</sup> Под квантом в настоящей статье понимается элемент сигнала, в течение которого параметры модуляции сохраняются неизменными. В цифровом фильтре кванту соответствует один интервал задержки.

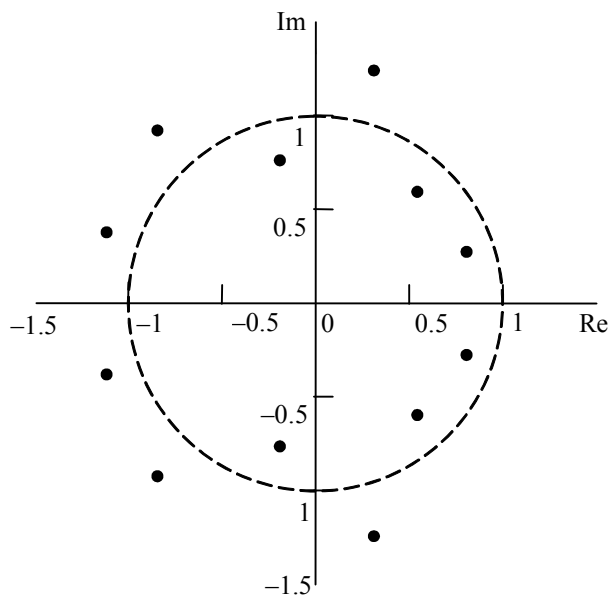


Рис. 1

единичной окружности, то число нулей вне единичной окружности будет  $N - M - 1$ . Тогда полиномы  $P(z)$  и  $Q(z)$  можно записать следующим образом:

$$P(z) = \sum_{k=0}^M p_k z^{-k} ; Q(z) = \sum_{k=0}^{N-M-1} q_k z^{-k} .$$

Частичная инверсная фильтрация может быть достигнута подачей входного сигнала на устойчивый фильтр, заданный выражением  $H_P(z) = 1/P(z)$ . Полную передаточную функцию фильтра с инверсией во времени можно записать как

$$U(z)/Y(z) = z^{-2L} H_Q(1/z)$$

Сомножитель  $z^{-2L}$  соответствует задержке во времени, равной  $2L$  дискретам ( $L$  – длина входного сигнала). Таким образом, полная передаточная функция фильтра

$$H(z) = U(z)/X(z) = z^{-2L} / [P(z)Q(z)] = z^{-2L} / C(z) .$$

Как следует из полученной зависимости, алгоритм позволяет получить передаточную функцию для фильтра, согласованного с определенным сигналом, такую, что в результате фильтрации на выходе получается единичный импульс, задержанный на время, равное удвоенной длительности входного сигнала. Обобщенная структурная схема рассматриваемого фильтра приведена на рис. 2 (блоки  $z^{-1}$  осуществляют задержки на один квант сигнала, блоки "Time reversal" – инверсию входных последовательностей во времени). Данный фильтр осуществляет обработку одной кодовой посылки. Для обработки  $n$  кодовых посылок требуется включение  $n$  таких фильтров, подключаемых последовательно.

Исследования рассмотренного фильтра для сигналов типа кода Баркера показали его высокую эффективность и устойчивость к помехам. Однако в радиолокации в основном используются сложные сигналы с большой длительностью, коды которых имеют характеристические полиномы большой степени. Так как в общем случае для отыскания корней полиномов степени больше второй применимы лишь итерационные алгоритмы, возникают

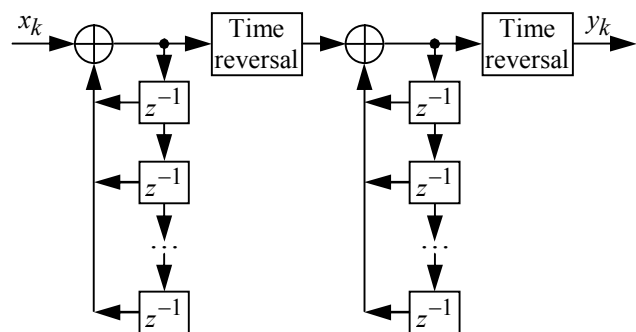


Рис. 2

трудности с решением данной задачи, вызванные усложнением вычислений на одном шаге итераций из-за возрастания степени полинома и увеличением общего числа итераций, необходимого для вычисления корней с необходимой точностью. Поэтому проблема поиска алгоритмов синтеза длинных последовательностей на основе коротких кодов весьма актуальна.

Указанный алгоритм позволяет в значительной степени сократить сложность вычислений за счет перехода к полиномам меньшей степени [4]. Однако поиск коэффициентов фильтра согласно этому алгоритму ведет к существенному усложнению аппаратной реализации фильтра подавления боковых лепестков, поскольку требует последовательного включения фильтров для более коротких кодов, а также элементов выборки импульсов (стробирования необходимых отсчетов). В результате существенно возрастает сложность практической реализации схемы.

Для увеличения длительности сигнала предложено использовать комбинированные коды, образуемые набором исходных кодов. Сложномодулированный зондирующий импульс сигнала может быть получен модуляцией когерентной несущей кодовыми последовательностями, сформированными по различным законам. В настоящей статье использованы коды Баркера различной длительности [5]. Каждый из исходных кодов Баркера обеспечивает практически полное подавление боковых выбросов в схеме, предложенной в [4]. Алгоритм формирования длинного зондирующего импульса заключается в модуляции когерентной несущей кодами Баркера, выбранными из исходного набора кодовых последовательностей и объединенными различными способами в пачку большей длительности. Длина излучаемого передатчиком РЛС сигнала  $N = N_1 N_2 \dots N_n$ , где  $N_n$  – код Баркера  $n$ -й длины. Так, использование кодов Баркера длиной 13, 11 и 3 позволяет получить код длиной  $K = 13 \times 11 \times 3 = 429$  квантов.

На рис. 3 представлен один из принципов формирования сложного составного сигнала из нескольких более простых дополнительной модуляцией импульсами большей длительности. На рис. 3, а показана последовательность из  $N$  кодов с периодом повторения  $T_{\Pi}$  и длительностью элементарного импульса  $t_0 = T_{\Pi}/M$ , где  $M$  – длительность кода в квантах. На рис. 3, б представлен код длительностью  $T_p = T_{\Pi}P$ , где  $P$  – число элементов кодовой последовательности, каждый из которых имеет длительность  $T_{\Pi}$ . На рис. 3, в дан резуль-

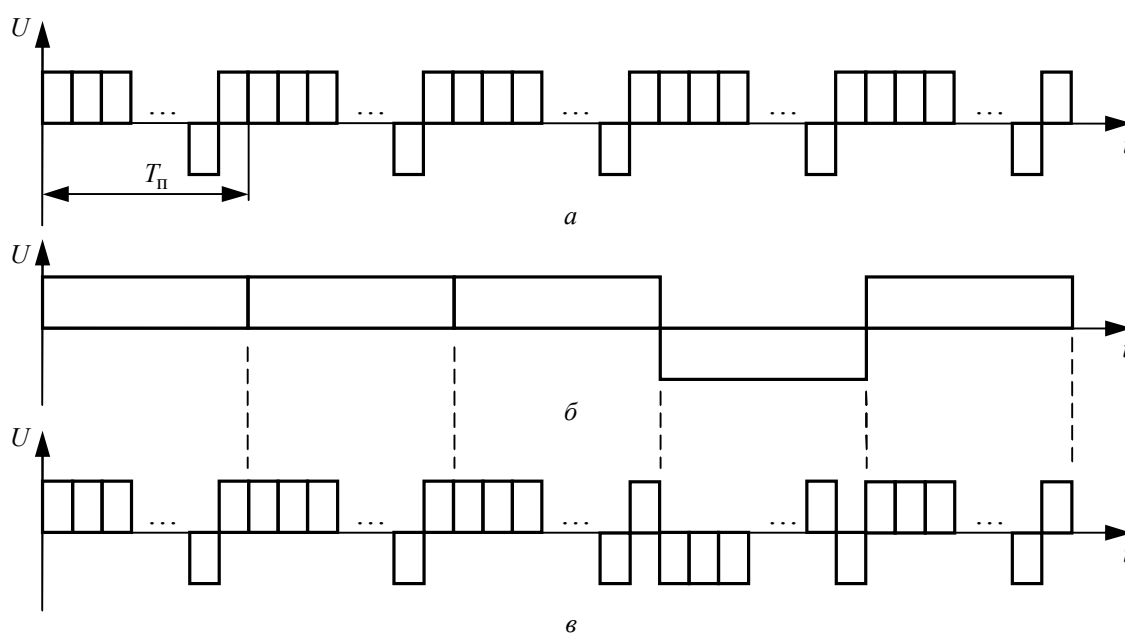


Рис. 3



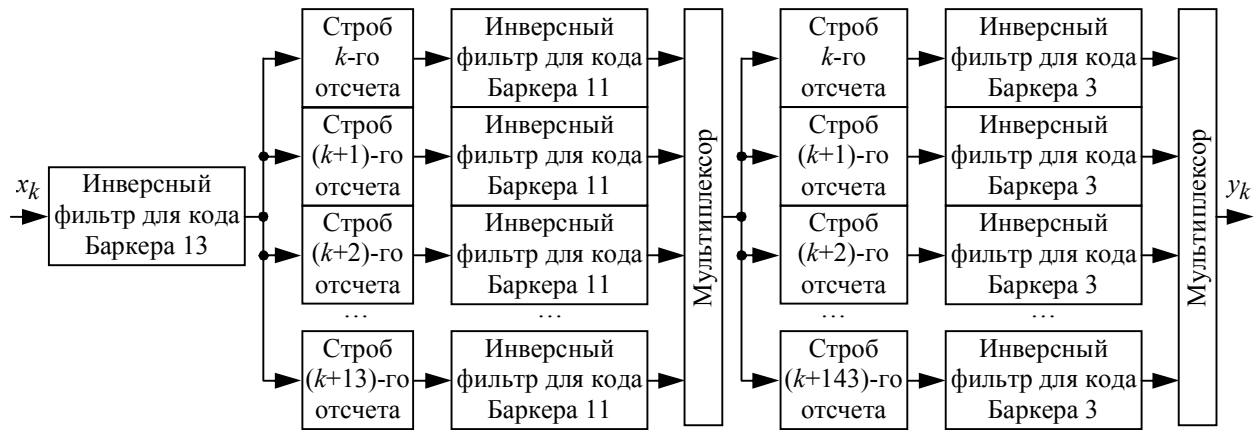


Рис. 4

тат модуляции кода по рис. 3, а кодом, представленным на рис. 3, б. Аналогичным образом можно сформировать составной код любой длительности из любых исходных кодовых последовательностей.

Можно синтезировать коды и большей длины. При этом встает лишь проблема возможности практической реализации цифрового фильтра подавления боковых лепестков.

В качестве примера реализации анализируемого алгоритма рассмотрим фильтр для составного кода, полученного из кодов Баркера с длинами 13, 11 и 3. На рис. 4 приведена структура РФ, обслуживающего  $K$  раздельно разрешаемых квантов.

Значения корней полиномов вводятся в узлы схемы параллельно (цепи ввода на рис. 4 не показаны). При фильтрации сигнал сначала пропускается через фильтр, согласованный с кодом длительностью 13, рассчитанный на обработку отдельных квантов, затем – через фильтр, согласованный с кодом длительностью 11 элементов, элементарный импульс которого равен 13 квантам кода Баркера 13. Фильтрация фильтром, согласованным с кодом Баркера 3, производится аналогично. Порядок следования отдельных фильтров может быть изменен.

Автокорреляционная функция (АКФ) сигнала, состоящего из 429 квантов, согласованного с рассмотренным фильтром, приведена на рис. 5. АКФ имеет значительные боковые лепестки, по которым помехи и отражения от других целей могут поступать на выход обнаружителя.

На рис. 6 и 7 показаны полученные расчетным путем результаты обработки смеси сигнала, состоящего из 429 квантов, и нормального шума, разработанным РФ. По оси ординат приведена нормированная амплитуда сигнала  $A$ , по оси абсцисс – номер количество квантов  $N$ . Отношение "сигнал/шум" на входе составляло 10 дБ. На рис. 6 показан отклик от одной цели, а на рис. 7 – отклик от четырех целей с разными амплитудами входных сигналов на входе, причем входные сигналы от второй и от третьей целей перекрывались во времени. Боковые выбросы отклика значительно ниже 80 дБ.

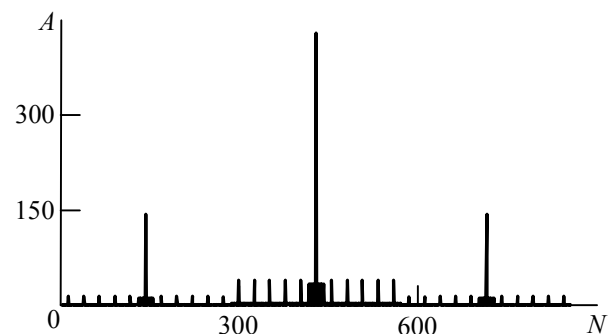


Рис. 5

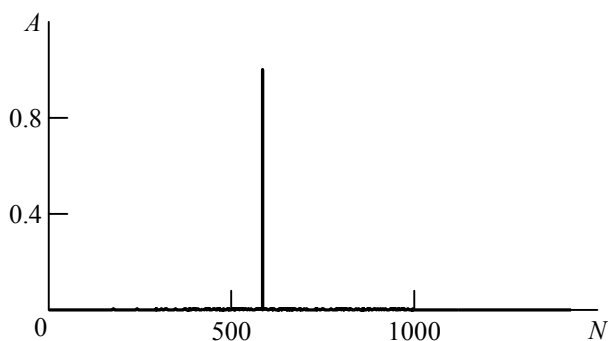


Рис. 6

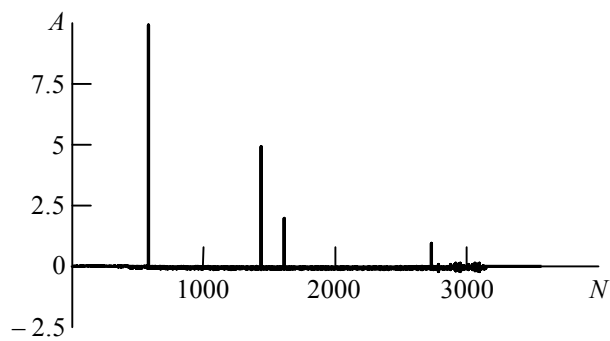


Рис. 7

На рис. 8 показан выигрыш рассогласованной обработки с обращением во времени по сравнению с обработкой сигнала в согласованном фильтре в зависимости от спектральной плотности шума  $N_0$ . В качестве меры качества обработки определены отношения отклика от полезного сигнала к сумме отклика в боковом лепестке и спектральной плотности мощности шума на выходах СФ  $\Psi_{СФ}$  и разработанного РФ  $\Psi_{РФ}$ . При нулевой мощности шума из-за того, что РФ имеет близкие к нулю боковые лепестки, кривая стремится к бесконечности; при возрастании шума кривая приближается к уровню  $- (1 \dots 2)$  дБ. При расчете вычислялось 100 значений функции в каждой точке.

Исследовано подавление боковых лепестков в области малых расстроек по доплеровской частоте. Инверсный фильтр в области малых набегов фазы обеспечивает значительно лучшее подавление боковых лепестков (практически полное их отсутствие). С увеличением межэлементного набега фазы качество работы обоих типов фильтров с точки зрения подавления боковых лепестков приблизительно сравнивается.

Рассмотренный фильтр реализован с помощью сигнальных процессоров типа SHARC. Эффективность его работы проверена на записях реальных радиолокационных сигналов. Анализ полученных данных выявил большую эффективность работы данного фильтра по сравнению с обычным СФ. В настоящее время производится реализация данного алгоритма на интегральных схемах программируемой логики фирмы "Altera".

В статье предложены комбинированные последовательности, образуемые кодами Баркера и позволяющие получить более длинные бинарные коды для модуляции фазы когерентной несущей РЛС со сложным сигналом значениями  $0, \pi$ . При использовании рассогласованных цифровых фильтров с обращением импульсной характеристики во времени нулевые лепестки откликов практически равны нулю. Потери на обработку, в зависимости от уровня шума, составляют  $1 \dots 2$  дБ; длительность отклика РФ в два раза превышает длину сигнала.

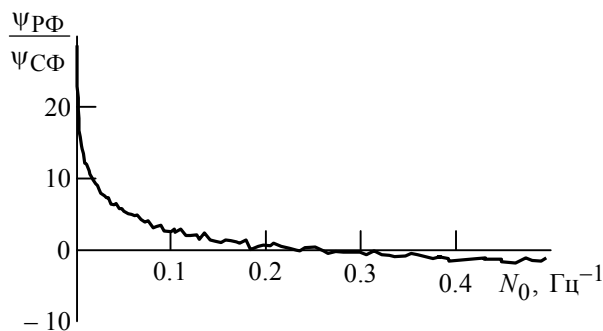


Рис. 8

## Список литературы

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 679 с.
2. Амиантов И. Н. Избранные вопросы статистической теории связи. М.: Сов. радио, 1971. 416 с.
3. Nuthalapati R. M. Design of mismatched filters for long binary codes // RadarCon 2008. May 26–30, 2008, Rome Italy. 2008 IEEE Proc. P. 54–59.
4. Patent USA 4 095 225. Int. Cl.<sup>2</sup> G01S 7/28. Range side lobe suppression method for a phase modulated radar pulse / E. O. Erikmat. Pb. 1978/06/13/.
5. Kalenichenko S. P., Rodionov R. V. Clutter suppression in radar by quasi-continuous complex signal and processing algorithm structure optimization // Proc. of "2001: Radar odyssey into space" IEEE conf., Atlanta, Georgia, May 1–3, 2001. Piscataway, NJ: IEEE op. centre, 2001. P. 438–443.

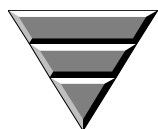
S. P. Kalenichenko, V. A. Sokolnikov  
Saint-Petersburg state electrotechnical university "LETI"

### **Processing radar waveform in digital filters with suppression a side lobe of mismatched filter of the respond function**

*The side lobes suppression method in digital filters for compression complex binary aperiodic signals is considered. Suppression is produced at treatment of response in the consistently connected filters with the signal temporal inversion. The example of side lobes suppression of the composted code constructed on the basis of Barker sequences in the synthesized digital filter is resulted.*

Autocorrelation function, digital filter transfer function, lateral petals, co-ordinated filter, radar station, inverse filtration

Статья поступила в редакцию 5 марта 2009 г.



**Редакционный отдел**

**Наши авторы**

*Абдувда Ахмед М. А.*

Магистр техники и технологий по направлению "Биомедицинская инженерия" (2004), аспирант Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина) по кафедре биомедицинской электроники и охраны среды. Автор 5 научных публикаций. Сфера научных интересов – разработка систем поддержки принятия решений медицинских специалистов.

*Богачев Михаил Игоревич*

Кандидат технических наук (2006), научный сотрудник кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор 31 научной работы. Область научных интересов – статистическая обработка сигналов, порождаемых сложными техническими и физиологическими системами; моделирование нелинейных систем.

*Бычков Юрий Александрович*

Доктор технических наук (1988), профессор (1988), заведующий кафедрой теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор более 200 научных работ. Сфера научных интересов – нелинейные системы управления.

*Зражевская Ираида Николаевна*

Кандидат технических наук (1959), старший научный сотрудник Государственного научного центра "Центральный научно-исследовательский институт им. акад. А. Н. Крылова". Автор 25 научных работ. Сфера научных интересов – излучение и дифракция электромагнитных волн.

*Калениченко Сергей Петрович*

Кандидат технических наук (1977), старший научный сотрудник (1982), ведущий научный сотрудник кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор более 150 печатных трудов. Сфера научных интересов – РЛС со сложными сигналами; синтез и обработка радиолокационных сигналов.

*Кардо-Сысоев Алексей Федорович*

Доктор физико-математических наук (1986), лауреат Государственной премии СССР (1987), главный научный сотрудник Физико-технического института им. А. Ф. Иоффе РАН. Автор более 150 научных трудов. Сфера научных интересов – физика быстрых процессов в полупроводниках и сверхширокополосная электродинамика.

*Садыкова Елена Владимировна*

Кандидат технических наук (2000), доцент (2005) кафедры биомедицинской электроники и охраны среды Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор более 30 научных и педагогических работ. Сфера научных интересов – разработка систем поддержки принятия решений медицинских специалистов.

*Сокольников Вячеслав Александрович*

Магистр по направлению "Телекоммуникации" (2008), аспирант Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина) по кафедре радиотехнических систем СПбГЭТУ. Автор двух научных публикаций. Сфера научных интересов – РЛС со сложными сигналами; синтез и обработка радиолокационных сигналов.

*Флеров Александр Николаевич*

Доцент кафедры радиоэлектронных систем управления Балтийского государственного технического университета "Военмех" им. Д. Ф. Устинова. Окончил Ленинградский военно-механический институт (1974) по специальности "Радиотехника". Автор более 50 научных трудов. Сфера научных интересов – системы управления антенными решетками; системотехника сверхширокополосных генераторов.

*Французов Алексей Дмитриевич*

Кандидат технических наук (1970), доцент (1973), почетный радист России (2003), начальник отдела ОАО «НПП "Радар ММС"». Автор более 100 научных трудов. Сфера научных интересов – антенно-фидерные системы летательных аппаратов; антенные системы для сверхширокополосных коротко импульсных сигналов.

*Червинский Евгений Наумович*

Доктор технических наук (2008), старший научный сотрудник (1985), начальник сектора ЗАО "СИМЕТА". Автор около 70 научных работ. Сфера научных интересов – системы точного времени.

*Шумаков Александр Александрович*

Аспирант Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина) по кафедре теоретических основ электротехники. Окончил Псковский вольный институт (2007) по специальности "Прикладная математика и информатика". Сфера научных интересов – численные методы.

*Щербаков Сергей Валерьевич*

Доктор технических наук (1999), профессор (2001), первый заместитель председателя Государственного комитета Псковской области по организации государственных закупок. Автор 98 научных работ. Сфера научных интересов – математическое моделирование; численные методы и комплексы программ.

## Требования к оформлению статей, предлагаемых для публикации в журнале "Известия вузов России. Радиоэлектроника"

Верстка журнала осуществляется с электронных копий. Используется компьютерная обработка штриховых и полутоновых (в градациях серого) рисунков. Журнал изготавливается по технологии офсетной печати. В редакционный совет журнала "Известия вузов России. Радиоэлектроника" необходимо представить:

- распечатку рукописи (1 экз.). Распечатка должна представлять собой твердую копию файла статьи;
- электронную копию (дискета либо CD). По предварительному согласованию с редсоветом допустима передача по электронной почте;
- отдельный файл для каждого рисунка и каждой таблицы в формате тех редакторов, в которых они были подготовлены (также возможна передача по электронной почте по предварительному согласованию). Размещение рисунка в электронной копии не освобождает от его представления отдельным файлом;
- аннотацию на английском языке (1 экз.);
- экспертное заключение о возможности опубликования в открытой печати (1 экз.);
- справку об авторах и ее электронную копию (1 экз.);
- рекомендацию кафедры (отдела) к опубликованию (следует указать предполагаемую рубрику) (1 экз.);
- сопроводительное письмо (1 экз.).

### Правила оформления текста

- Подготавливается в текстовом редакторе Microsoft Word.
- Применение полужирного и курсивного шрифтов, а также подчеркивания, допустимо при крайней необходимости.
- Формулы подготавливаются во встроенном редакторе формул Microsoft Word или в редакторе MathType.
- Начертание обозначений в формулах и основном тексте должны быть полностью идентично.
- Математические обозначения равенства, подобия, соотношений множеств и их элементов, логических функций и кванторов, знаки ' (штрих), ° (град), Ø, римские цифры, дефис, другие специальные знаки следует повторить простым карандашом на поле распечатки с текстовой расшифровкой.
- Ссылки на формулы и таблицы даются в круглых скобках, ссылки на использованные источники (литературу) – в квадратных прямых.
- Основной текст не может завершаться рисунком или таблицей.
- Дополнительный, поясняющий текст следует выносить в подстрочные ссылки при помощи знака сноски, а при большом объеме – оформлять в виде приложения к статье.
- Распечатка подписывается всеми авторами.

### Верстка текста

- Параметры страницы: поля: верхнее 3 см, левое и нижнее 2.5 см, правое 2 см; верхний колонтитул 2 см, нижний колонтитул 2 см.
- Формат бумаги А4.
- Первая строка: УДК, шрифт Arial 12 pt, выравнивание по левому краю, автоматические переносы отключены, интервалы "перед" 18 pt, "после" 6 pt, межстрочный "Множитель 1.2".
- Перечень авторов, разделенный запятыми: инициалы перед фамилиями, после каждого инициала точка и пробел (не отрывать инициалы от фамилии); шрифт Arial 14 pt, жирный, курсив, выравнивание по правому краю, отступ слева 1 см, автоматические переносы отключены, интервалы "перед" и "после" 0 pt, межстрочный "Множитель 1.2".
- Место работы авторов: шрифт Arial 12 pt, курсив, выравнивание по правому краю, отступ слева 1 см, автоматические переносы отключены, интервалы "перед" и "после" 0 pt, межстрочный "Множитель 1.2".  
Если авторы относятся к разным организациям, то после указания всех авторов, относящихся к одной организации, дается ее наименование, затем список авторов, относящихся к второй организации, и т. д.
- После перечня авторов и организаций – название статьи: шрифт Arial 18 pt, выравнивание по левому краю, отступы слева 0.5 см, автоматические переносы отключены, интервалы "перед" и "после" 6 pt, межстрочный "Множитель 1.2".
- Аннотация 3–7 строк, характеризующих содержание статьи: шрифт Times New Roman 10 pt, курсив, выравнивание по ширине, отступы слева и справа 1.5 см, первая строка отступ 0.7 см, интервалы "перед" и "после" 12 pt, межстрочный одинарный.
- Ключевые слова – 3–10 слов и словосочетаний, отражающих содержание статьи, разделенных запятыми (в конце списка точка не ставится): шрифт Times New Roman 10 pt, жирный; регистр, "Как в предложениях", выравнивание по левому краю, автоматические переносы отключены, интервалы "перед" 0 pt, "после" 6 pt, интервал межстрочный одинарный.

- Основной текст: шрифт Times New Roman 12 pt, выравнивание по ширине, первая строка отступ 1 см, интервал межстрочный "Множитель 1.2".
- Подстрочные ссылки используются постраничные; шрифт Times New Roman 10 pt, выравнивание по ширине, интервал межстрочный одинарный; имеют сквозную нумерацию в пределах статьи.
- Строка с текстом "Список литературы": шрифт Times New Roman 12 pt, выравнивание по центру, интервалы "перед" 12 pt, "после" 6 pt, межстрочный "Множитель 1.2".
- Собственно список литературы: каждая ссылка с номером в отдельном абзаце, шрифт Times New Roman 10 pt, первая строка отступ 0.7 см, выравнивание по ширине, интервал межстрочный одинарный.
- Перечень авторов на английском языке, разделенный запятыми: инициалы перед фамилиями, после каждого инициала точка и пробел (не отрывать инициалы от фамилии), шрифт Arial 10 pt, жирный курсив, выравнивание по левому краю, автоматические переносы отключены, интервалы "перед" 12 pt, "после" 0 pt, межстрочный одинарный.
- Место работы авторов на английском языке: шрифт Arial 10 pt, курсив, выравнивание по левому краю, автоматические переносы отключены, интервалы "перед" 12 pt, "после" 0 pt, межстрочный одинарный.  
Если авторы относятся к разным организациям, то после указания всех авторов, относящихся к одной организации, дается ее наименование, затем список авторов, относящихся к второй организации, и т. д.
- После перечня авторов и организаций – название статьи на английском языке: шрифт Arial 10 pt, жирный, регистр "Как в предложениях", выравнивание по левому краю, автоматические переносы отключены, интервалы "перед" 6 pt, "после" 0 pt, межстрочный одинарный.
- Аннотация на английском языке 3–7 строк, характеризующих содержание статьи: шрифт Times New Roman 10 pt, курсив, выравнивание по ширине, отступы слева 1.5 см, справа 1.5 см, первая строка отступ 0.7 см, интервалы "перед" и "после" 6 pt, межстрочный одинарный. Аннотация на английском языке должна быть переводом аннотации на русском языке, размещенной в заголовочной части статьи.
- Ключевые слова на английском языке – 3–10 слов и словосочетаний, отражающих содержание статьи, разделенных запятыми (в конце списка точка не ставится): шрифт Times New Roman 10 pt, выравнивание по левому краю, автоматические переносы отключены, интервалы "перед" 0 pt, "после" 6 pt, межстрочный одинарный.

### **Верстка формул**

- Формулы подготавливаются во встроенном редакторе формул Microsoft Word или редакторе MathType; нумеруются только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи; использование при нумерации букв и других символов не допускается.
- Формулы, как правило, выключаются в отдельную строку, в тексте допустимо расположение только однострочных формул, на которые нет ссылок (надстрочные и подстрочные символы в таких формулах допустимы).
- Выключенные в отдельную строку формулы выравниваются по середине строки, номер (при необходимости) заключается в круглые скобки и выравнивается по правому краю строки.
- Необходимо использовать следующие установки редактора формул: размеры: полный 12 pt, подстрочный 10 pt, под-подстрочный 9 pt, символ 18 pt, подсимвол 12 pt; стили: текст, функция, число – шрифт Times New Roman, вектор–матрица – шрифт Times New Roman, жирный, греческий малый, греческий большой, символ – шрифт Symbol, переменная – шрифт Times New Roman, курсив.
- При записи формул следует придерживаться следующих условий: латинские обозначения скалярных переменных вводятся стилем редактора "переменная", т. е. курсивом, все остальные обозначения скалярных переменных вводятся прямым шрифтом (стили греческий малый, греческий большой, символ – для греческого шрифта, текст – для остальных шрифтов); векторы вводятся стилем "вектор–матрица" – прямым полужирным (при обозначении вектора греческим шрифтом следует использовать стиль "другой" и указать жирное начертание вручную), функции вводятся стилем "функция", для индексов используется стиль "переменная" только в том случае, если они, в свою очередь, указывают на скалярные переменные, обозначенные латинским шрифтом, во всех остальных случаях для индексов используется стиль "текст".
- Цифры, скобки и знаки математических операций вводятся только прямым шрифтом.
- При работе в редакторе формул следует максимально использовать его возможности для ввода математических обозначений (в частности, при вводе скобок и знаков математических операций необходимо пользоваться шаблонами редактора, а не клавиатурой).
- Все впервые встречающиеся в формуле обозначения должны быть расшифрованы сразу после формулы: после нее ставится запятая, а на следующей строке без абзацного отступа после слова "где" приводятся все обозначения и через тире – их расшифровки; список должен быть составлен в порядке появления обозначений в формуле; в многострочных формулах вначале полностью описывается числитель, а затем знаменатель; изменение индекса также считается введением нового обозначения, требующим новой расшифровки.  
Если при расшифровке встречается обозначение, в свою очередь требующее формульной записи и расшифровки, то с ним поступают как с отдельной формулой, но расшифровку помещают в круглые скобки.

### **Верстка рисунков**

- Рисунки, представляющие собой графики, схемы и т. п., должны быть выполнены в графических векторных редакторах (встроенный редактор Microsoft Word, CorelDraw, Microsoft Visio и т. п.). Использование точечных форматов (.bmp, .jpeg, .tif, .html) допустимо только для рисунков, представление которых в векторных форматах невозможно (фотографии, копии экрана монитора и т. п.).
- На рисунках должны размещаться только сам рисунок и его нумерационный заголовок (например, "Рис. 3"). Описание самого рисунка и введенных на нем обозначений следует приводить в основном тексте статьи. Нумерационный заголовок рисунка помещается под ним по его середине.
- Каждый рисунок вместе с номером должен помещаться в текстовое поле или в поле объекта (в терминах Microsoft Word).
- Следует стремиться к горизонтальному размеру рисунка, равному 16.5 или 8 см (в первом случае рисунок будет заверстан вразрез текста, во втором – в оборку).
- Рисунок может содержать несколько полей, если приведенные на них данные имеют тематическую общность и примерно равные размеры; каждое поле помечается русской буквой в алфавитном порядке, обозначения размещаются под полем по его середине; последовательность полей должна совпадать с последовательностью их первого упоминания в тексте.
- Рисунок размещается в ближайшем возможном месте после первого упоминания его или какого-либо его поля в тексте.
- Первая ссылка на рисунок производится, например, как рис. 3, последующие – как (см. рис. 3), применение скобок определяется требованиями орфографии.
- На рисунке следует приводить минимум текста и обозначений, обозначения размещать на линиях-выносках; каждый фрагмент текста давать в отдельном текстовом поле, при необходимости отключать у полей линии и заливку.
- Основные линии на рисунках (границы блоков и соединительные линии на схемах, линии графиков) имеют толщину 1.25 pt, вспомогательные (выноски, оси, размерные линии) – 0.75 pt.
- При формировании рисунка, представляющего собой схему, следует придерживаться требований ГОСТ ЕСКД, ЕСПД (в частности, недопустимо использовать условные графические обозначения, соответствующие стандартам США и Европы, но не совпадающие с предусмотренными ГОСТ)
- На рисунках, представляющих собой графики зависимостей, не следует давать размерную сетку, следует дать лишь засечки на осях, причем все засечки должны быть оцифрованы.
- Если оси на рисунках оцифрованы, то они завершаются на позиции очередной засечки, где засечка не ставится, а вместо цифровых значений даются обозначение переменной и (через запятую) единица измерения.
- Если оси не оцифровываются, то они завершаются стрелками, рядом с которыми даются обозначения переменных без единиц измерения.
- Длины и размерность осей следует устанавливать таким образом, чтобы на рисунке не было пустых областей, т. е. каждая из засечек должна оцифровывать хотя бы некоторые точки одной из приведенных кривых.
- Все текстовые фрагменты и обозначения на рисунке даются шрифтами размером 10 pt с единичным межстрочным интервалом; цифровые обозначения, буквенные обозначения полей и номер рисунка даются курсивом.
- При необходимости в отдельных текстовых полях на рисунке могут помещаться обозначения и тексты, сформированные в редакторе формул; при этом следует использовать следующие установки редактора: размеры: полный 10 pt, подстрочный 8 pt, под-подстрочный 7 pt, символ 14 pt, подсимвол 10 pt.
- Ссылки на обозначения на рисунке в основном тексте даются тем же начертанием (прямым или курсивом), как на рисунке, но с размером шрифта 12 pt.
- В распечатке рисунки могут быть вмонтированы в текст в ближайшем месте от ссылок на них либо место их размещения помечается на левом поле страницы в прямоугольной рамке.
- При невозможности представить электронные версии рисунков следует представить только твердые копии, обеспечивающие качественное воспроизведение после сканирования (графики – черной тушью на белой бумаге, фотографии – на матовой бумаге размером не менее 9×12 см, не более 21×30 см).

### **Верстка таблиц**

- Текст в таблицах печатается через 1 интервал, шрифт Times New Roman, основной текст 10 pt, индексы 8 pt.
- Таблица состоит из следующих элементов: нумерационного заголовка; головки (заголовочной части), включающей заголовки граф (объясняют значение данных в графах); боковика (первой слева графы) и прографки (остальных граф таблицы). Боковик может состоять из нескольких первых слева граф.
- Нумерационный заголовок содержит слово "Таблица" и ее номер арабскими цифрами (без знака номера перед ними, без точки на конце), предваряет тематический заголовок. Ссылка в тексте на таблицу дается аналогично ссылкам на рисунки. Нумерационный заголовок выравнивается по правому полю и выделяется



светлым курсивом. Нумерация таблиц сквозная в пределах статьи. Если таблица единственная, нумерационный заголовок не дается, а ссылка в тексте приводится по типу "см. таблицу".

- Над продолжением таблицы на новой странице ставится заголовок "Продолжение табл. 5" (если таблица на данной странице не оканчивается) или "Окончание табл. 5" (если таблица на данной странице оканчивается). Если таблица продолжается на одной или на нескольких последующих страницах, то головка ее должна быть повторена на каждой последующей странице.
- Ни один элемент таблицы не должен оставаться пустым.
- Заголовки пишут в именительном падеже единственного или множественного числа без произвольного сокращения слов (допустимы только общепринятые сокращения всех видов: графические сокращения, буквенные аббревиатуры и сложносокращенные слова). Множественное число ставится только тогда, когда среди текстовых показателей графы есть показатели, стоящие во множественном числе.
- В одноярусной головке все заголовки пишутся с прописной буквы. В двух- и многоярусных головках заголовки верхнего яруса пишутся с прописной буквы, а заголовки второго, третьего и т. д. ярусов – с прописной буквы, если они грамматически не подчинены стоящему над ними заголовку верхнего яруса, и со строчной, если они грамматически подчинены стоящему над ними заголовку.

### Список литературы

- Выполняется по ГОСТ 7.1-2003. Библиографическое описание документа. Введ. 01.07.2004. М.: ИПК Издательство стандартов, 2004 либо на ГОСТ Р 7.0.5-2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления. Введ. 28.04.2008. М.: Стандартинформ, 2008
- Не должен превышать 10 (для обзорных заказных статей – 20) наименований, приводятся только источники, на которые есть ссылки в тексте (ссылки на неопубликованные работы не допускаются).
- Ссылки на материалы, размещенные на электронных носителях, следует давать лишь в крайнем случае; при этом необходимо указать электронный адрес до конкретного материала (т. е. включая сегмент, оканчивающийся расширением, соответствующим текстовому документу) и дату обращения к нему, либо полный издательский номер CD или DVD. Редакция оставляет за собой право потребовать от автора замены ссылки, если на момент обработки статьи по указанному адресу материал будет отсутствовать.

Справка об авторах включает для каждого автора фамилию, имя, отчество (полностью), ученую или академическую степень, ученое звание (с датами присвоения и присуждения), краткую научную биографию, количество печатных работ и сферу научных интересов (5–6 строк), название организации, служебный и домашний адреса, служебный и домашний телефоны, адрес электронной почты, при наличии – факс. Если ученых и/или академических степеней и званий нет, то следует указать место получения высшего образования, год окончания вуза и специальность. В справке следует указать автора, ответственного за прохождение статьи в редакции.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Технические вопросы можно выяснить по адресу [monchak@yandex.ru](mailto:monchak@yandex.ru)